

壁面粗度変化を有する矩形断面管路内の発達乱流解析*

杉山 均¹⁾ 田澤 亨²⁾ 人見 大輔³⁾

Numerical Analysis of Developing Turbulent Flow in a Rectangular Duct with Abrupt Change from Rough to Smooth Wall

Hitoshi Sugiyama Toru Tazawa Daisuke Hitomi

Numerical analysis has been performed for three-dimensional developing turbulent flow in a rectangular duct with abrupt change from rough to smooth wall. An algebraic Reynolds stress model is adopted in order to predict precisely. Calculated results of mean velocity and Reynolds stresses are compared with the experimental data in order to examine the validity of the presented numerical method and an algebraic Reynolds stress model. As a result of this research, it has been found that the present method is able to predict main flow velocity qualitatively and reproduce the secondary flow of the second kind which is generated by anisotropic turbulence. But the present method tends to underestimate the intensity of secondary flow. The presented method predicts reasonably the distribution of friction velocity along the flow direction which indicates minimum value just after passing roughened wall.

Key Words: Numerical Analysis, Computer Fluid Dynamics, Flow / Roughened Wall, Algebraic Reynolds Stress Model ⑮

1. 緒 言

自動車は、多種多様の形状を有する管路により構成され、同時に管路内流れは層流、乱流、はく離、旋回流、噴流など形状同様多種多様な流れ場にて活用され伝熱効率、吸入効率、ポンプ効率など自動車性能に少なからぬ影響を及ぼす。更に管路は、経年変化により表面粗度も変化し管路抵抗増大を引き起こす。粗面壁を有する乱流場は、非等方性乱流場の代表的な流れ場であり、第2種二次流れの生成に見られるよう研究の面からも興味ある現象を内包している。そこで本研究では、壁面粗度が変化する場合の三次元粗面壁乱流場を解析することを対象とした。

粗面壁を有する流れ場は、層流場、乱流場、粗面高さ、粗面配置、粗面形状など、いくつかの要因により変化する。管路代表長さに対して粗面高さの比が大きくなると圧力勾配による第1種二次流れが生成され、この二次流れは伝熱促進や物質移動の移流効果として作用する。第1種二次流れが層流、乱流に関係なく生成される流れであるのに対し、粗面の高さが、粘性底層厚さのスケールまで減少した非円形断面直線管路内の乱流場においては、乱れの非等方性に起因する第2種二次流れが生成される。生成機構の異なる両者の二次流れは、乱流場においては共存し、圧力勾配あるいは非等方性乱流の

いずれかの要因により二次流れパターンは支配される。

非等方性乱流が支配的となる粗面壁乱流に関して、いくつか実験解析が報告されている。藤田ら⁽¹⁾、廣田ら⁽²⁾は、正方形断面直線管路内の完全発達乱流を対象に乱流計測結果を報告している。曲がり管路を対象とした粗面壁乱流計測も報告され須藤ら⁽³⁾は、砂粒を用いて粗面壁を形成し円形断面180°曲がり管路に対する流動状態の計測結果を提示している。

以上の実験が完全発達乱流場であるのに対し、粗面壁から滑面壁、あるいは逆の場合の粗度変化に伴う乱流の弛緩過程の計測結果も報告されている。Antonia - Luxton⁽⁴⁾は、正方形断面微小角柱により構成された粗面壁から滑面壁への乱流構造変化を示している。Taylor ら⁽⁵⁾は、半円球の微小突起により粗面壁を構成し、粗面壁から滑面壁への乱流弛緩現象を報告している。何れの実験においても、粗面壁から滑面壁に流れが変化すると管摩擦係数は急激に減少し、滑面壁の管摩擦係数より小さくなり、その後徐々に回復し滑面壁のそれに漸近していくことを報告している。以上の乱流弛緩現象に関する実験が二次元乱流を対象としているのに対し、最近、三次元乱流場における粗面壁から滑面壁への弛緩現象が、矩形断面直線管路を対象に廣田ら⁽⁶⁾により報告された。非等方性乱流を特徴づける第2種二次流れ変化も計測されている。

粗面壁を有する三次元乱流解析に関する数値解析もいくつか報告されているが、実験と比較すると少なくなる。Naimi - Gessner⁽⁷⁾は、粗面壁乱流場の実験を対象に、3種類の乱流モデルを用い第2種二次流れを予測するとともに、乱流モデルの差異分析を報告している。杉山ら⁽⁸⁾も、粗面壁乱流の実

*2005年6月15日受理。

1)・3) 宇都宮大学大学院工学研究科 (321-8585 宇都宮市陽東 7-1-2) (E-mail:sugiyama@cc.utsunomiya-u.ac.jp)

2) (株) 東芝 (105-8001 東京都港区芝浦 1-1-1)

験を対象に代数応力モデルを用いて、時間平均速度場、第 2 種二次流れ、レイノルズ応力場を再現できることを示している。しかし、何れの数値解析も完全発達領域での解析結果であり、粗面壁から滑面壁への弛緩現象を対象にした粗度変化を伴う発達乱流現象に関する数値解析結果は未だ報告されていない。また、何れの数値解析も、乱流エネルギー、乱流散逸の境界条件として使用される壁関数を用い、壁関数を用いる際に必要となる対数則度分布に、粗面壁に対する対数則度分布を仮定して解析を行っている。この解析手法は、粗面を構成する微小突起形状を直接計算格子に考慮するのではなく、粗面壁を乱流特性量の境界条件の一部として間接的に計算に加味する手法で、比較的簡易な解析手法で複雑な非等方性乱流を予測することができる点に特色がある。この解法では、対数速度分布の代わりに、粗面壁の等価砂粒粗さが示されていれば、等価砂粒粗さで示される粗い管路内の無次元速度分布から摩擦速度を容易に算出でき、粗面壁乱流解析が可能と思われる。廣田ら⁽⁶⁾の実験では、この等価砂粒粗さが示されており、等価砂粒粗さを用いた解法の妥当性を検討すること、数値解析手法の観点から興味ある問題である。

以上のような粗面壁乱流に関する研究経緯から、本研究では廣田ら⁽⁶⁾の測定した粗面壁から滑面壁への弛緩現象の数値解析を行い、解析手法、乱流モデルの妥当性について検討すると同時に、乱流構造弛緩現象についても新たな知見を示すことを目的とする。

2. 記 号

B	: 短辺長さの半分
D_h	: 水力直径
k	: 乱流エネルギー
k_s	: 等価砂粒粗さ
p	: 変動圧力
Re	: レイノルズ数 $U_b D / \nu$
$\overline{u_i u_j}$	: レイノルズ応力
U_b	: 断面内の主流方向平均速度
U_i	: i 軸方向の時間平均速度
U_τ	: 摩擦速度
U_{1c}	: 管中心点での主流方向速度
X_i	: 直交座標系における i 方向座標軸
y	: 壁面からの垂直距離
$(\quad)_0$	: $X_1/D_h=0.0$ における値
δ^*	: 境界層排除厚さ
ε	: 乱流散逸
θ	: 運動量厚さ
ν	: 動粘性係数
ρ	: 密度
τ_w	: 壁面せん断応力

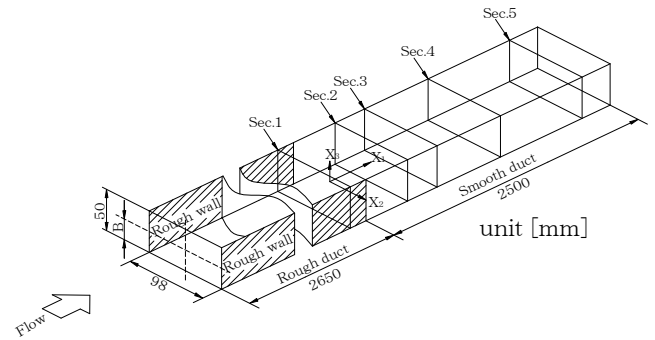


Fig.1 Schematic diagram of experimental apparatus and definition of coordinate system

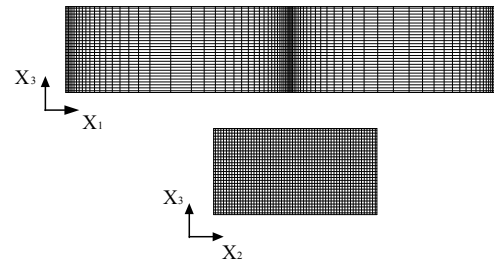


Fig.2 Computational mesh layout

3. 解 析 手 法

3.1. 計算対象実験

解析対象とした廣田ら⁽⁶⁾の実験装置概略図、ならびに計算座標系を図 1 に示す。座標系は、図 1 に示すように粗面管路と滑面管路との接合位置を流れ方向原点として、座標系原点を矩形断面の中心に置いた直交座標系である。主流方向を X_1 、水平方向を X_2 、深さ方向を X_3 と定義した。

廣田ら⁽¹⁰⁾は、作動流体に空気を用い熱線流速計を用いて粗面壁、滑面壁を有する直線管路内の乱流計測を行った。管路は矩形断面形状 (98mm×50mm) を有し、全長 5150mm の直線管路で、水力直径 D_h (66.2mm) の 77.8 倍に相当する。その前半部 2650mm では、両短辺壁を粗面、両長辺壁を滑面で構成し、後半部 2500mm では全壁面を滑面で構成している。従って、粗度変化は管路入口から $40D_h$ の短辺部にて変化し、長辺部は管路全体に渡り滑面である。粗面は半径 1mm の半円球を 5mm 間隔に千鳥状に配置して粗面壁を形成している。実験はレイノルズ数 6.5×10^4 の条件で行っている。

断面内の計測領域は、流れの対称性を確認し 1/4 断面で行っている。計測は全滑面管路部分の 7 断面、ならびに粗面管路と滑面管路との接合部から $0.25D_h$ 上流に位置する断面にて行っている。論文に示されたのは、全滑面管路内の 4 断面と粗・滑面管路接合部から $0.25D_h$ 上流に位置する断面の合計 5 断面での計測結果である。また、全滑面管路の完全発達領域における計測結果も示されている。そこで、本解析では、論文に示された 5 断面での計測結果と完全発達領域での全滑面管路の計測結果を比較対象とした。論文に示されている計測断面を図 1 に上流側から Sec. 1, Sec. 2, Sec. 3, Sec. 4,

Sec. 5 として示した。各 Section の位置は順番に $X_1/D_h = -0.25, 2.0, 7.3, 22.4, 37.5$ に相当する。

3.2. 支配方程式

流れ場の非等方性を正確予測する意味より、解析にあたってはレイノルズ応力輸送方程式を解くことを考える。レイノルズ応力輸送方程式の厳密式は以下のように示される。

$$\begin{aligned} \frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} = & - \left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial X_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial X_k} \right) + \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial X_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial X_i} \right) \\ & - \frac{\partial}{\partial X_k} \left\{ \overline{u_i u_j u_k} - \nu \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial X_k} + \frac{p}{\rho} (\delta_{jk} \overline{u_i} + \delta_{ik} \overline{u_j}) \right\} \\ & - 2\nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial X_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial X_k} \end{aligned} \quad (1)$$

上式を直接的に解くことは不可能であり何らかのモデル化が必要となる。数値計算を実行する上で障害となる左辺の対流項、拡散項に対しては Rodi⁽⁹⁾ 近似を用いてモデル化を行った。この近似より輸送方程式は、微分式形から代数式形に変換されることになり計算負荷の低減に寄与する。レイノルズ応力輸送方程式の圧力・ひずみ相関項のモデル化も問題となるがモデル化、定数系に関しては別報⁽¹⁰⁾にて詳述した。

3.2. 数値解析

計算に際し対象領域は、矩形断面の全断面を対象とし、長さ方向にも実験と同じ管路長を設定した。計算格子数は流れ方向に 80、断面方向に 61×31 を設定している。計算格子配列を図 2 に示す。粗面壁から全滑面壁に変化する領域にて細かな格子を設定している。

流入境界条件については、速度に関しては一様流速分布を与え、乱流エネルギー、乱流散逸値に関しては、実験でも明記されていないため $k/U_b^2 = 1 \times 10^{-5}$ 、 $\varepsilon = k^{3/2}/D$ と小さな値を課した。壁面における乱流エネルギー、乱流散の境界条件は壁関数を用い、出口境界条件はノイマン条件とした。式の離散化は有限差分近似より行い計算諸量の格子点配置は Regular Grid 法に依った。対流項差分近似は QUICK 法を使用した。計算レイノルズ数は実験と同じ $Re = 6.5 \times 10^4$ である。本解析では、高レイノルズ数型乱流モデルであるため乱流エネルギー、乱流散逸の境界条件には壁関数を用いる。その際、摩擦速度を導出することが必要となるが、粗面壁に対する対数則度分布を仮定して摩擦速度を得る方法と、等価砂粒粗さにて表された無次元速度分布から摩擦速度を算出する手法とがある。本解析においては、等価砂粒粗さ k_s が 1.87mm と報告されていることから、以下の粗い管路に対する無次元速度分布を用いて解析する。

$$\frac{U_1}{U_\tau} = 5.75 \log_{10} \ln \left(\frac{y}{k_s} \right) + 8.5 \quad (2)$$

4. 結果と考察

実験と解析との比較の際には、図 1 に示す Sec. 1 から Sec. 5 断面と全滑面管路の完全発達場における実験結果と比較した。

全滑面管路の完全発達乱流場での比較には、全長 $78D_h$ の全滑面管路を対象に同一レイノルズ数にて計算し比較した。以下に示す図中では Smooth Duct として両結果の比較を示した。

4.1. 平均速度場比較

図 3 に各断面、全滑面管路の完全発達領域における主流方向速度の比較結果を示す。各値は流路断面中心の主流方向速度 U_{1c} にて無次元化した。実験、計算とも Sec. 1 断面の粗面壁近傍では、比較的低速の流体が形成されていることが分かる。この低速流体は、Sec. 2 断面以降の全滑面管路に流入すると、徐々に加速され高速流体が占める。これは、粗面壁抵抗が無くなり圧力損出の減少により流れやすくなったことに起因している。全滑面管路に流入すると、壁面近傍でも多くの流量が流れる結果、流路断面中心での最大主流方向速度は減少し、粗面壁の場合と比較して、管路中心部における最大主流方向速度の占める領域は拡大傾向を示す。このような特徴的な現象を計算も再現している。また、実験と計算の相違点として等値線パターンの湾曲程度を指摘できる。例えば、Sec. 1 断面における 0.98 の等値線分布を実験と計算とで比較すると実験では、大きな曲がりが見られるのに対し計算では顕著でなく実験と異なる。Smooth Duct での等値線分布を比較すると、両結果とも等値線はコーナ部に突出した分布を示し、完全発達領域における実験値を計算は比較的良好に再現している。

以上の主流方向速度等値線の歪は、乱れの非等方性により生成される第 2 種二次流れに起因する。この第 2 種二次流れの流れ強度は、断面内平均速度の数パーセントと微弱であるが、主流方向速度等値線、あるいは温度分布等値線を歪ませる結果、流れ場に少なからぬ影響を与える。図 4 に、この第 2 種二次流れベクトルの比較結果を示す。粗面管路に位置する Sec. 1 断面では、二次流れは粗面壁に向かって流れ込み、底滑面をコーナ部から管路中央部に向かう流れを形成することにより、底滑面近傍で循環流を形成することが、両結果から分かる。一方、粗面壁近傍の二次流れ強度を比較すると、計算は粗面壁に近づくにつれ減衰するのに対して、実験は粗面壁にほぼ垂直に比較的強い二次流れベクトルが存在する。これは、計算では千鳥状に配列された半球突起形状を計算格子に考慮せず、壁関数を用いて一様粗面壁を仮定したことによるものと考えられる。

粗面壁管路から全滑面管路に流入すると、二次流れは、その強度を減衰しながら Smooth Duct の二次流れに漸近していくことになる。計算における Smooth Duct の二次流れを見ると、側壁と底壁面側に回転方向の異なる循環流が形成され、 $1/4$ 断面にて一対の渦が形成されているが、実験では側壁側には明確な循環流は形成されていない。

計算結果から二次流れの推移を考察する。全滑面管路に流入すると、Sec. 2 断面の側壁近傍に認められるように、側壁面に沿ってコーナ部から側壁中央部に向かう二次流れ

が形成される。この流れは、Sec. 1 断面では認められない流れであるが、粗面から滑面への変化が、乱れの非等方性を大きく変化させた結果生成されたものと解釈できる。側壁近傍に生成された二次流れは、流れの発達とともにその強度を強めながら、側壁側に比較的大きな循環流を形成する。一方 Sec. 1 断面に認められた大きな循環流は、強度を弱めつつ、その占める領域も減少させながら、Sec. 4, Sec. 5 断面にて認められる様に一對の渦を形成していく。計算の Sec. 5 と完全発達領域での二次流れはほぼ同一であるが、実験での Sec. 5 断面と完全発達領域での二次流れには多少相違が見られ、流れは完全に回復はしていないことを示唆しており、実験と計算で異なる点である。

4.2. 変動速度場比較

図 5 に主流方向の垂直応力を実験と比較した結果を示す。平均速度場同様、値は管路中心速度にて無次元化して比較した。Sec. 1 断面での粗面壁近傍では比較的大きな値が存在することが両結果から分かる。実験の最大等値線の値は 0.115 であるが、計算も近い値を予測している。全滑面管路に流入すると粗面壁側の値は流れの発達とともに減衰し、完全発達乱流場の値に漸近して行く。実験では 0.08 の最大値を示す等値線が認められるが、計算でも 0.085 と近い値を予測している。完全発達領域では、その等値線分布はコーナ部に突出した特徴的分布となるが、計算も同様な等値線分布を示している。

管路中央部における垂直応力の変化について見ると、実験では Sec. 1 断面で 0.05 の等値線が認められ、全滑面管路に流入すると徐々に減衰し Sec. 4 断面にて 0.04 の等値線が認められる。計算も Sec. 4 断面にて 0.04 の等値線を再現しているが、値が占める領域に関しては実験と計算とは差が認められ計算の方が広い領域を予測している。粗面壁近傍における垂直応力変化と比較すると変化の程度は緩慢である。この傾向は、底滑面壁近傍の垂直応力変化についても同様に指摘できる。

図 6 にせん断応力 $\overline{u_1 u_3}$ を実験と比較した結果を示す。各値は管路中心速度にて無次元化している。実験にて特徴的な点として、零等値線を境に異符号領域が形成され、全断面にて認められる。この異符号領域は、第 2 種二次流れにより主流方向速度等値線が歪まされる結果生成される。すなわち、主流方向速度の X_3 軸方向の速度勾配値によりせん断応力の正負値が決まる。また、全滑面管路に流入した Sec. 2 断面から、変化の程度は主流方向垂直応力の変化ほど顕著ではないことが分かる。この実験結果に対して計算結果は、異符号領域は Sec. 4 断面にて、初めて生成され粗面管路では認められない。この異符号領域の生成は以下の理由により生成される。すなわち上下対称軸上 ($X_3/B=0.0$) を第 2 種二次流れが側壁から管路中心部に沿って形成されると、主流方向速度等値線は二次流れの移流効果により、粗面壁から突出した分布を呈する。この湾曲した主流方向速度分布において X_3 軸方向の主流方向速度勾配値の符号が変化して異符号領域が形成される。粗面

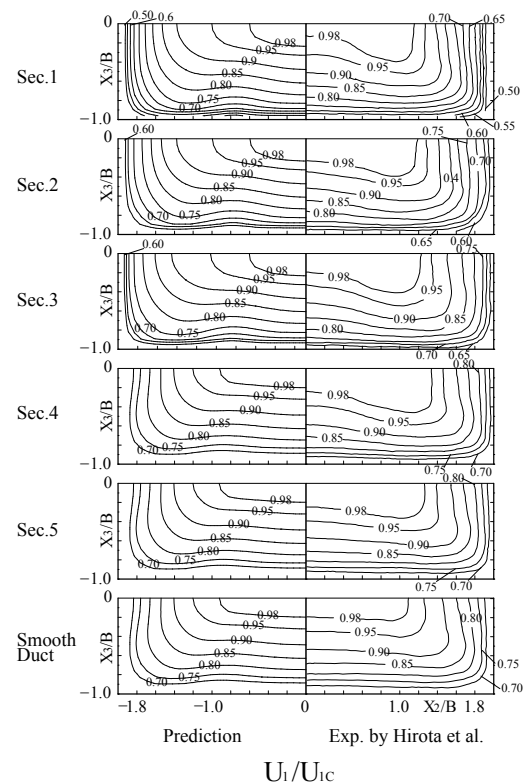


Fig.3 Comparison of streamwise velocity

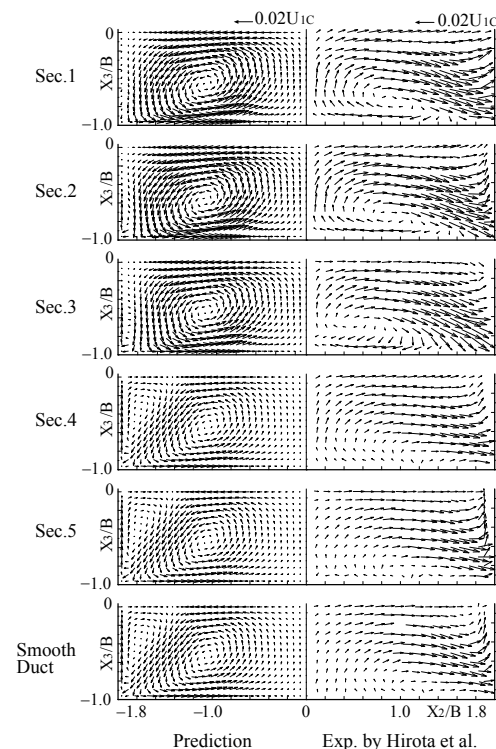


Fig.4 Comparison of secondary flow of the second kind

管路の第 2 種二次流れは、計算結果では粗面壁に向かって流れ、主流方向速度を粗面壁から突出す効果はなく、従って、計算では粗面管路内で異符号領域が形成されることはない。

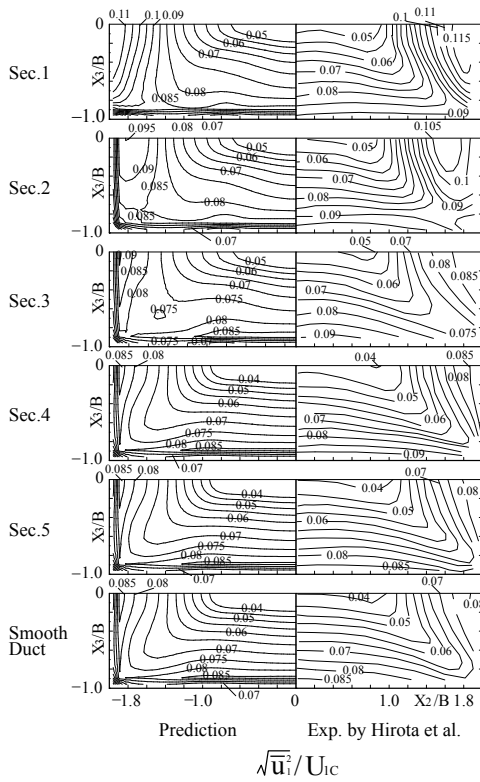


Fig.5 Comparison of main flow fluctuating velocity

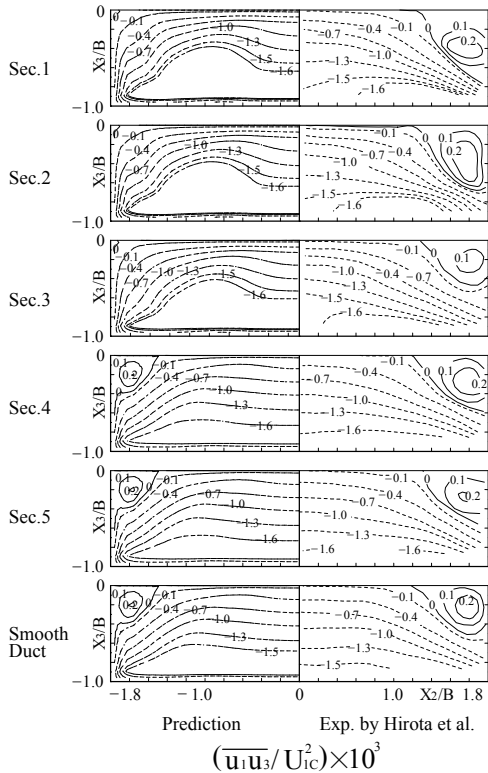


Fig.6 Comparison of shear stress $\overline{u_1 u_3}$

図7はせん断応力 $\overline{u_1 u_2}$ を実験と比較した結果で、管路中心速度にて無次元化している。実験は、せん断応力 $\overline{u_1 u_3}$ と同様に零等値線を挟んで異符号領域が形成され、全管路にて認められる。Sec.1断面の粗面壁近傍にて比較的高い値の絶対値が

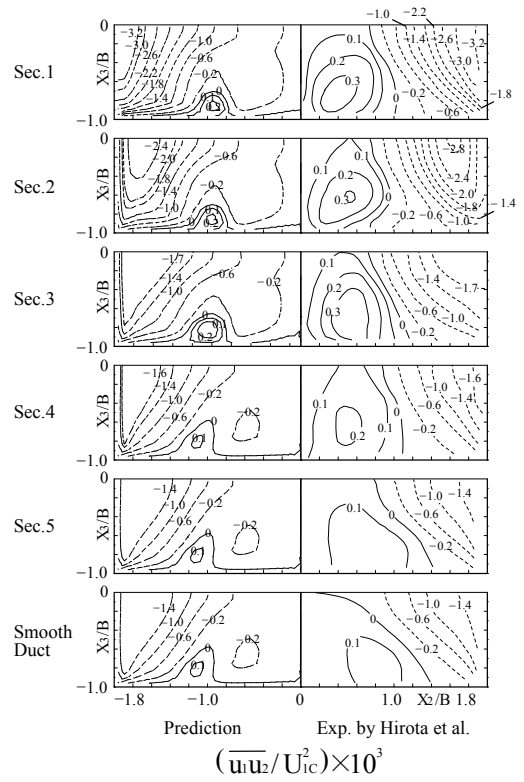


Fig.7 Comparison of shear stress $\overline{u_1 u_2}$

認められるが、全滑面管路に流入すると急激に減衰することが分かる。計算でも全管路にて異符号領域が形成され、その最大値が全滑面管路に流入すると減衰し、完全発達乱流場の値に漸近するのは共通しているが、正符号の占める領域に相違が認められる。この相違は、第2種二次流れによる主流方向速度等値線の歪み程度に依存し、大きく歪むことにより正符号の占める領域は大きくなる。X2/B=0.0軸に沿う二次流れを比較すると、実験のほうが大きな二次流れを示し、この流れにより主流方向速度等値線は、X2/B=0.0軸に沿って底壁面から管路中央部に突出した等値線を示すことになる。この点から、計算は第2種二次流れを小さく予測する傾向にある。

4.3. 管摩擦係数の変化

Antonia-Luxton⁽⁴⁾, Taylor ら⁽⁵⁾は、粗面から滑面への乱流弛緩現象の特徴的現象の一つとして管摩擦係数が急激に減少し、滑面壁の管摩擦係数値より小さくなり、その後徐々に回復し滑面壁の管摩擦係数値に漸近していくことを報告している。このような現象が本解析結果においても認められるかどうか興味あるところである。そこで、管摩擦係数と等価な摩擦速度を流れ方向に算出し検討する。図8にその結果を示す。図には粗面壁の X3/B=0.0, -0.48, -0.97 における流れ方向に沿う摩擦速度を示した。変化の特徴を明確にするため、それぞれの位置での値は、粗面壁の最終位置に相当する X1/Dh=0.0の摩擦速度にて無次元化表示している。図8の結果から明らかなように、計算結果は何れの位置においても、全滑面管路に流入すると急激に減少し、最小値をとった後に、徐々に

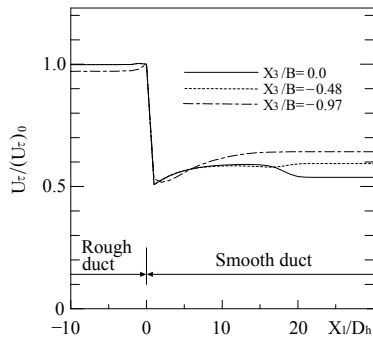


Fig.8 Calculated result of friction velocity along the flow direction

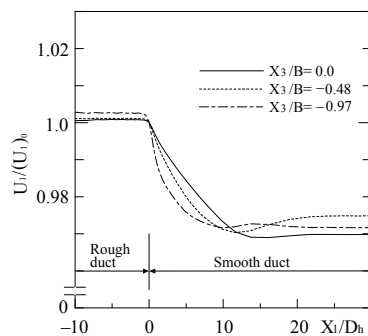


Fig.9 Calculated result of main flow velocity

増加して一定値に漸近し、これまでの報告と符合している。この現象は以下のような生成機構に起因するものと推察される。定常状態での境界層運動量方程式を以下に示す。

$$U_1^2 \frac{d\theta}{dX_1} + (2\theta + \delta^*) U_1 \frac{dU_1}{dX_1} = \frac{\tau_w}{\rho} \quad (3)$$

いま、粗面から全滑面への流入直後の流れに上式を適用し、粗面壁中央点の X_2 軸上 ($X_3/B=0.0$) に着目すると U_1 は管路中心速度と考えられる。この時、左辺第 2 項の速度勾配は負の値を示す。これは、全滑面に流入すると比較的高速の流体が、抵抗の少ない滑面壁に流れ込み管路中心での速度が急激に減速するためである。第 2 項が負の値を示すことにより、摩擦速度は粗・滑面接合部を境に急激に減少する。この主流速度変化を確認するため、主流方向速度の変化を次に示す。

図 9 は、左右対称軸上 ($X_2/B=0.0$) の $X_3/B=0.0, -0.48, -0.97$ の各点における主流方向速度の流れ方向への発達を示したものである。各値は粗・滑面接合部での主流方向速度で無次元化している。何れの位置でも主流方向速度は急激に減少することが分かる。摩擦速度が最小値を取った後、回復し一定値に近づくのは、主流方向速度勾配値が零に漸近し、左辺第 2 項の影響が減少するためと考えられる。

5. 結 論

乱流構造の弛緩現象を数値解析し以下の結論を得た。

(1) 粗面から全滑面管路に流入すると、粗面壁近傍の加速により管路中心部の主流方向速度は、粗面壁の場合より平坦化する。こうした特徴的な現象を計算も再現している。

(2) 第 2 種二次流れにより主流方向速度等値線は歪まされるが、計算は実験ほど顕著には等値線歪みを再現していない。

(3) 主流方向垂直応力分布を計算は比較的良好に予測する。しかし、せん断応力に形成される異符号領域の生成は予測するものの、それが占める領域に相違が認められた。

(4) 摩擦速度は粗面から全滑面に流入すると急激に減少し、滑面の摩擦速度値をアンダーシュートして最小値を示し、その後滑面の摩擦速度に回復する特徴的な現象を計算も再現した。

(5) 等価砂粒粗さを用いて粗面壁乱流場を解析することが可能であることを示した。

参 考 文 献

- (1) 藤田秀臣, 横沢 肇, 廣田真史, 西垣聡: 1 面に粗面をもつ正方形流路内の乱流, 日本機械学会論文集, B53, 492, pp. 2370-2376 (1987)
- (2) 廣田真史, 藤田秀臣, 横沢 肇: リブ状粗面をもつ正方形流路内乱流における乱れエネルギー, 日本機械学会論文集, B56, 522, pp. 360-366 (1988)
- (3) 須藤浩三, 檜原 秀樹, 高見敏弘, 岡村成浩: ターボ機械, 粗面をした曲り円管路内の流れ, 23, 8, pp. 455-460 (1989)
- (4) Antonia, R. A., Luxton, R. E.: The response of a turbulent boundary layer to a step change in surface roughness Part1. smooth to rough, J. Fluid Mech. 48, pp. 721-761 (1971)
- (5) Taylor, R. P., Taylor, J. K., Hosni, M. H. Coleman, H. W.: Relaxation of the turbulent boundary layer an abrupt change from rough to smooth wall, Trans. ASME, J. Fluids Eng., 115, pp. 379-382 (1993)
- (6) 廣田真史, 藤田秀臣, 船久保誠, 井口高志: 壁面粗度の急変を伴う長方形流路内乱流の弛緩過程, 日本機械学会論文集, B67, 655, pp. 637-644 (2001)
- (7) Naimi, M., Gessner, F.: Calculation of fully-developed turbulent flow in rectangular ducts with nonuniform wall roughness, Trans. ASME, J. Fluids Eng., 119, 3, pp. 249-258 (1995)
- (8) 杉山 均, 秋山光庸, 高橋利彰: 粗壁面および滑面壁を有する矩形管路内の乱流構造解析, 日本原子力学会誌, 40, 4, pp. 312-322 (1998)
- (9) Rodi, W., A new algebraic relation for calculation the Reynolds stresses, Z. Angew. Math. Mech., 56, pp. 219-221 (1976)
- (10) 杉山 均, 秋山光庸, 佐藤誉之: 対向偏心直円管を有する円管路内の乱流構造解析, 日本原子力学会誌, 39, 7, pp. 582-592 (1997)