

代数応力モデルによる正方形断面管内の助走区間発達乱流解析*

杉山 均^{*1}, 秋山 光庸^{*1}, 芹沢 寿行^{*2}An Algebraic Stress Model Analysis of Developing
Turbulent Flow in a Square Duct

Hitoshi SUGIYAMA, Mitsunobu AKIYAMA and Toshiyuki SERIZAWA

A numerical analysis has been made on three-dimensional developing turbulent flow in a square duct using a modified Reynolds stress equation model and transport equation model for turbulent flux. The calculated results for the velocity field describe a characteristic phenomenon of developing turbulent flow in comparison with the available experiment. The results for the temperature field suggest that the value of the turbulent Prandtl number which was used as a constant in the two-equation model actually changes along the flow direction.

Key Words: # Developing Turbulent Flow, # Secondary Flow, # Square Duct Turbulent Heat Flux Equation, # Algebraic stress Model

1. 緒 言

非円管路内の乱流場において、その流れの非等方性により、二次流れが発生することは、古くより指摘されてきた。Prandtl は、この特有な二次流れを、曲がり管内で遠心力により誘起される二次流れと区別して、第2種二次流れと定義した。この第2種二次流れは、主流等速度線をひずませる結果、熱流動特性にも少なからぬ影響を与える。また河川工学の分野においても、土砂の輸送などに関連し研究がなされている。

この乱れの非等方性を正確に扱うためには、レイノルズ応力方程式を解くことが必要となるがレイノルズ応力方程式を直接解くことは難しくモデル化が不可欠となる。レイノルズ応力方程式のモデル化に関しては、古くは Rotta, Chou, Lumly らにより理論的な考察がなされ、Launder-Ying⁽¹⁾は、第2種二次流れを数値計算により解いた。その後、Naot-Shavit-Wolfshtein⁽²⁾, Launder-Reece-Rodi⁽³⁾, Gibson-Launder⁽⁴⁾, Gessner-Emery⁽⁵⁾らにより種々のモデルが提案されている。著者らは前報⁽⁶⁾において代表的なモデルを正方形断面管

路内発達乱流に適用しモデルの差異分析を行い、各モデルの得失を明確にした。

本報においては、前報の差異分析を踏まえ、レイノルズ応力方程式中でモデル化の際問題となる圧力ひずみ相関項に関して改良を加えることを試みる。さらに改良を加えたモデルを、正方形断面管路における助走区間流れに適用し解析結果を Melling-Whitelaw⁽⁷⁾の乱流応力分布の実験結果と比較して詳細な検討を行う。また温度場への拡張を考え、乱流熱流束を正確にとらえる意味より乱流熱流束方程式を導入し、代表的なモデルを適用し解析することにより新たな知見を得ることを目的とする。

2. 記 号

α : 温度伝導率

$\alpha_{ij}^{(4)}$: 四次相関テンソル

$C_1, C_2, C_1^*, C_1' C_2^*, C_2', C_{1T}, C_{2T}, C_{1T}^*, C_{2T}^*, C_{1T}'^*, C_{2T}'^*, C_{1T,w}, C_{2T,w}$: 経験定数

D_{eff} : 拡散項

D_h : 水力直径

P_k : 乱流エネルギーの生成率

k : 乱流エネルギー

L : 乱れの長さスケール

* 原稿受付 平成元年12月8日。

^{*1} 正員、宇都宮大学工学部 (〒321 宇都宮市石井町 2753)。

^{*2} 正員、本田技研工業(株) (〒107 東京都港区南青山 2-1-1)。

- p : 変動圧力
 P : 時間平均圧力
 Re : レイノルズ数 $= U_b D_h / \nu$
 T : 時間平均温度
 T' : 時間変動温度
 u : 時間変動速度成分
 U : 時間平均速度分布
 U_b : 混合平均速度分布
 U_τ : 摩擦速度 $= (\tau_{av} / \rho)^{1/2}$
 $\alpha, \beta, \eta, \zeta, \nu$: 経験定数
 δ_{ij} : クロネッカーのデルタ
 ε : 乱流散逸
 χ : カルマン定数
 ν : 粘性係数
 π_{ij} : 圧力ひずみ相関項
 π_{ir} : 圧力温度こう配相関項
 ρ : 密度
 τ_{av} : 平均壁面せん断応力

3. モデル化検討

3.1 レイノルズ応力方程式 レイノルズ応力方程式の厳密形は次のように示される。

$$\begin{aligned}
 \frac{D \overline{u_i u_j}}{Dt} &= - \overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \\
 P_{ij} &: \text{production} \\
 &+ \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\
 \pi_{ij} &: \text{pressure-strain correlation} \\
 &- \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\overline{u_i u_j u_k} - \nu \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} - \frac{p}{\rho} (\delta_{jk} u_i + \delta_{ik} u_j) \right] \\
 D_{diff ij} &: \text{diffusion} \\
 &- 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \\
 \varepsilon_{ij} &: \text{dissipation}
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

左辺第1項は対流項、右辺第1項は、生成項であり順に圧力ひずみ相関項、拡散項、散逸項を示す。圧力ひずみ相関項は再配分項とも呼ばれ、特定の乱流応力が、極端に大きくならないよう抑制する役割を持つ。また上式において式を難解なものとし、数値計算の上からも障害となるのは、左辺第1項の対流項ならびに、拡散項である。これらの項に対しては、前報⁽⁶⁾にて用いた、Rodi⁽⁸⁾近似を用いて次のようにモデル化を行う。

$$\frac{D \overline{u_i u_j}}{Dt} - D_{diff ij} = \frac{\overline{u_i u_j}}{K} (P_k - \varepsilon), \quad P_k = - \overline{u_k u_l} \frac{\partial U_k}{\partial x_l}
 \tag{2}$$

この種の近似を行うことより、レイノルズ応力方程式は、元の微分形より代数式に置き換えられ、近接空間での物理量の相互依存性が薄れるという問題を内包するものの、各乱流成分を容易に扱え計算時間の短縮などの面より有効な近似法である。

モデル化の上で特に問題となるのは、圧力ひずみ相関項であるが、Chou⁽⁹⁾はこの項に理論的考察を考えて次のように表した。

$$\begin{aligned}
 \frac{p}{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= \frac{1}{4\pi} \int_{\forall \mathbf{o}_1} \left[\left(\frac{\partial^2 \overline{u_i u_m}}{\partial x_i \partial x_m} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right. \\
 &\quad \left. + 2 \left(\frac{\partial U_l}{\partial x_m} \right) \left(\frac{\partial \overline{u_m}}{\partial x_l} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right] \frac{d \text{VOL}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} + S_{ij}
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

上式で'のついたもの、つかない項はおのおの $\mathbf{x}$, および $\mathbf{y}$ における位置を示し、 S_{ij} は壁面近傍以外では無視できる項である。

ここで $\pi_{ij,1}$ は純粋な乱れによる影響を示し、非等方的な流れを等方化しようとする役割を持つ。 $\pi_{ij,2}$ は平均流による影響を含む項であり、作り出された乱流エネルギーを等方化しようとする項である。これらの項のモデル化に対しては Rotta⁽¹⁰⁾によるものが最初であり、現在種々提案されているモデルの多くは、Rotta による理論を基礎としている。

$\pi_{ij,1}$ のモデル化に関しては本報においても Return to isotropy の概念を導入した Rotta による次のモデルを導入する。

$$(\pi_{ij,1} + \pi_{ij,1}) = -c_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right) \tag{4}$$

$\pi_{ij,2}$ に対しては式(3)の $\pi_{ij,2}$ の速度変動に対するこ・う配が二次のテンソルとなることに留意して次のような形に置き換えた。

$$\pi_{ij,2} = \left(\frac{\partial U_l}{\partial x_m} \right) a_{ij}^{lm} \tag{5}$$

$$a_{ij}^{lm} = - \frac{1}{2\pi} \int_{\forall \mathbf{o}_1} \frac{\partial^2 \overline{u_m' u_l'}}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \frac{d \text{VOL}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \tag{6}$$

ここで a_{ij}^{lm} は四次相関テンソルを示す。さらにこの四次相関テンソルは次の条件を満足する。

$$a_{ij}^{lm} = a_{ji}^{lm} = a_{il}^{jm} \tag{7}$$

$$a_{li}^{mi} = 0 \tag{8}$$

$$a_{jj}^{ii} = 2 \overline{u_m u_l} \tag{9}$$

式(7)は系の対称条件であり式(8)は速度変動成分に関する連続の式より導かれる条件である。四次相関テンソル式(6)において $l=j$ とするとグリーンの第3の定理を用いて解くことができ式(9)の条件を得る。

この四次相関テンソルに対して、Hanjalic-Laund⁽¹¹⁾, Launder-Reece-Rodi⁽³⁾, Naot-Shavit-Wol-

fshtein⁽²⁾らがモデル化を行った。Launder らは、式(7)~(9)の条件を熟慮し、四次相関テンソルが、二次のテンソルであるレイノルズ応力、あるいはクロネッカのデルタの積の線形結合で表されるであろうと推測しモデル化を行った。本報では、特に Launder-Reece-Rodi モデルを(以降 LRR モデルと略す。)基礎とした。彼らのモデル式を示すと次のようになる。

$$a_{ij}^{mi} = \alpha \overline{\delta_{ij} u_m u_i} + \beta (\delta_{mi} \overline{u_i u_i} + \delta_{mj} \overline{u_i u_i}) + \delta_{ii} \overline{u_m u_j} + \delta_{ij} \overline{u_m u_i} + c_2 \delta_{mi} \overline{u_i u_i} + [\eta \delta_{mi} \delta_{ij} + v (\delta_{mi} \delta_{ij} + \delta_{mj} \delta_{ii})] k \quad \dots\dots\dots (10)$$

Naot は、Launder と異なり、2 点の速度相関テンソルを用いてモデル化を行ったが、両者とも同様な結果を得ている。式(7)~(9)の条件を式(10)に適用することにより次の $\pi_{ij,2}$ に関する式を得ることができる。

$$(\pi_{ij,2} + \pi_{ji,2}) = -(\alpha + \beta) \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij} \right) + (\eta + v) \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) k + (4\beta + \alpha) \left(D_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij} \right) \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$P_{ij} = -\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$D_{ij} = -\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \quad \dots\dots\dots (13)$$

α, β, η, v は c_1 で表される定数である。

制約条件の式(8)は四次相関テンソルに対するものとして扱われるが、平均流の影響を含む項 $\pi_{ij,2}$ との結合を強くする意味より、また $\pi_{ij,2}$ が式(5)のように定義されることより、式(8)の制約条件の代わりに次の条件を採用する。

$$a_{ii}^{mi} \frac{\partial U_i}{\partial x_m} = 0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

この指摘は、Gessner-Eppich⁽¹²⁾により成されたもので、本報ではこの制約条件の基に $\pi_{ij,2}$ のモデル化を行う。この条件を課すと

$$a_{ii}^{mi} \frac{\partial U_i}{\partial x_m} = (2\beta + \eta + 4v) k \delta_{mi} \frac{\partial U_i}{\partial x_m} + (5\beta + \alpha + c_2) \overline{u_m u_i} \frac{\partial U_i}{\partial x_m} \quad \dots\dots\dots (15)$$

となる。 $(\partial U_i / \partial x_m) \cdot \delta_{mi}$ は連続の式より常に零となり LRR モデルでは $2\beta + \eta + 4v = 0$ としていた条件が使用できなくなる。その結果、新たな定数 $\zeta = -v - \eta$ を導入し、 $\pi_{ij,2}$ を書き改めると次のように示される。

$$\pi_{ij,2} + \pi_{ji,2} = -(\alpha + \beta) \left(P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P_k \right) + \zeta k \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + (4\beta + \alpha) \left(D_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P_k \right) \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$\alpha = \frac{1}{11}(4c_2 + 10) \quad \beta = -\frac{1}{11}(2 + 3c_2) \quad \dots\dots\dots (17)$$

圧力ひずみ相関項に対する壁面の影響は、定数 c_1, c_2, ζ が壁からの距離の関数となるように設定する。すなわち

$$c_1 = c_1^* + c_1' f\left(\frac{L}{x_w}\right) \\ c_2 = c_2^* + c_2' f\left(\frac{L}{x_w}\right) \quad \dots\dots\dots (18) \\ \zeta = \zeta^* + \zeta' f\left(\frac{L}{x_w}\right)$$

$f(L/x_w)$ は、壁の影響を表す関数で、壁近傍で 1、壁から離れるにつれ減少する値をとり次のように定義した。

$$f\left(\frac{L}{x_w}\right) = \frac{c\mu^{3/4}k^{3/2}}{\kappa\varepsilon} \frac{1}{x_w} \cdot \frac{1}{x_w} = \frac{\sum (1/x_n)_i^2}{\sum (1/x_n)_i} \quad \dots\dots\dots (19)$$

以上が再配分項のモデル化である。散逸項に対しては、流れが高レイノルズ数流れであり局所等方性を仮定して次のようにモデル化する。

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon \quad \dots\dots\dots (20)$$

生成項に関してはモデル化する必要はなく、レイノルズ応力方程式を扱ううえでの強みとなる。

3・2 乱流熱流束方程式 乱流熱流束方程式の厳密形は次のように示される。

$$\frac{D u_i T'}{Dt} = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial T}{\partial x_j} - \overline{u_j T'} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{p}{\rho} \frac{\partial T'}{\partial x_i} \\ P_{iT} ; \text{production} \\ \pi_{iT} ; \text{pressure-temperature gradient correlation} \\ -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{u_i u_j T'} + \frac{p}{\rho} T' \delta_{ij} \right) \\ -(\nu + a) \frac{\partial T'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\ D_{iTT} ; \text{diffusion} \\ \varepsilon_{iT} ; \text{dissipation} \quad \dots\dots\dots (21)$$

左辺第 1 項は対流項、右辺第 1 項より順に生成項、圧力温度こう配相関項、拡散項、散逸項を示している。

対流項、拡散項に対しては、レイノルズ応力方程式と同様 Rodi による近似を用いてモデル化し次のように示される。

$$\frac{D u_i T'}{Dt} - D_{iTT} = \frac{\overline{u_i T'}}{2k} (P_k - \varepsilon) + \frac{\overline{u_i T'}}{2T'^2} (P_T - \varepsilon_T) \quad \dots\dots\dots (22)$$

P_T, ϵ_T は温度変動に対する生産と散逸を意味している。ここでは $P_T = \epsilon_T$ として左辺第2項を無視して使用する。

圧力温度こう配相関項のモデル化においては先の圧力ひずみ相関項同様、純粋な乱れによる影響 $\pi_{iT,1}$ と平均流の影響を含む項 $\pi_{iT,2}$ とに分けてモデル化する。本報においてはより厳密な形として次の式を用いた。

$$\pi_{iT,1} = -c_{1T} \frac{\epsilon}{k} \overline{u_i T'} - c'_{1T} \frac{\epsilon}{k} \left(\frac{\overline{u_i u_j}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \right) \overline{u_j T'} \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$\pi_{iT,2} = c_{2T} \overline{u_j T'} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - c'_{2T} \overline{u_j T'} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \quad \dots\dots (24)$$

壁面による影響に対しては、レイノルズ応力方程式の場合と同様に関数 f を導入し次のように設定する。

$$\begin{aligned} c_{1T} &= c_{1T}^* \left[1 + c_{1T,w} f \left(\frac{L}{x_w} \right) \right] \\ c'_{1T} &= c'_{1T}^* \left[1 + c_{1T,w} f \left(\frac{L}{x_w} \right) \right] \\ c_{2T} &= c_{2T}^* \left[1 + c_{2T,w} f \left(\frac{L}{x_w} \right) \right] \\ c'_{2T} &= c'_{2T}^* \left[1 + c_{2T,w} f \left(\frac{L}{x_w} \right) \right] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (25)$$

関数 f の定義は式(19)と同様である。

式(21)、右辺第4項の散逸項のモデル化に際しては、流れが高レイノルズ数流れで、局所等方性を仮定すると

$$(\nu + a) \frac{\partial T'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0 \quad \dots\dots\dots (26)$$

となり散逸項は無視した。

生成項に対しては、特にモデル化することなく、式(21)に示す形で扱える。以上により各項に対するモデル化が終了したことになる。

3.3 定数決定 レイノルズ応力方程式に対しては $c_{1T}^*, c_{2T}^*, \zeta^*, c'_{1T}, c'_{2T}, \zeta'$ の定数を決定することが必要になる。これらのモデル定数を決定する際には、前述でモデル化された方程式を、単純せん断流、壁面近傍流れに適用しおのおの流れ場に対するレイノルズ応力方程式を導出し、加えて各流れの実験結果を基に定数を決定していく。本研究の場合 Rodi 近似を用いていることにより、非局所平衡状態の表現も可能なため、実験結果としては、Champagne-Harris-Corrsin⁽¹³⁾ ($\lambda = P_k/\epsilon = 1.0$) および Harris-Graham-Corrsin⁽¹⁴⁾ ($\lambda = P_k/\epsilon = 1.55$) のデータを基に、壁面近傍の流れに対しては Launder⁽³⁾ の使用したものをを用い定数決定を行った。

乱流熱流束方程式に対しては $c_{1T}, c_{1T}^*, c'_{1T}, c_{2T}, c_{2T}^*, c'_{2T}, c_{1T,w}, c_{2T,w}$ の定数を決定することが必要となる。これらの定数に対しては、レイノルズ応力方程式

および乱流熱流束方程式を、単純せん断流、壁面近傍流れに適用し、それらの式より乱流プラントル数を導出し、おのおの流れ場における実験値より定数決定を行った。これは Gibson-Launder⁽⁴⁾ の手法と同一である。ただし $c_{2T}^*, c_{2T}'^*$ に対しては、既知としてよく使用される定数系、 $c_{2T}^* = 0.8, c_{2T}'^* = 0.2$ を用いている。以上より求めた定数を表1に示す。

4. 数値解析

4.1 計算モデル 計算対象モデルとしては、正方形断面形状を有する管路とし、系の対称性を考慮して1/4断面にて解析を行った。座標系は、図1に示すように主流方向を X_1 、断面内で、 X_2, X_3 を定義している。

4.2 数値解析 数値解析においては、スタッガード格子系を用い、有限体積法により、各方程式の離散化を行った。差分スキームは、速度成分については QUICK (三次精度の風上差分)、乱流特性量の K, ϵ ならびに温度については PLDS (セル Peclet 数のべき乗で表現される差分スキーム) をおのおの使用した。圧力については、SIMPLE 法を用い圧力補正を行った。

境界条件は、 K, ϵ に対しては、壁面近傍で壁法則が成立するものとし、かつ局所平衡が成立することを仮定して壁関数より与えた。温度境界条件に対し、本研

表 1 各方程式中の定数

(a) レイノルズ応力方程式中の定数

c_{1T}^*	c_{2T}^*	ζ^*	c'_{1T}	c'_{2T}	ζ'
1.4	0.44	-0.16	-0.35	0.12	-0.1

(b) 乱流熱流束方程式中の定数

c_{1T}	c'_{1T}	c_{2T}	c'_{2T}	$c_{1T,w}$	$c_{2T,w}$
3.9	-2.5	0.8	0.2	0.25	-0.46

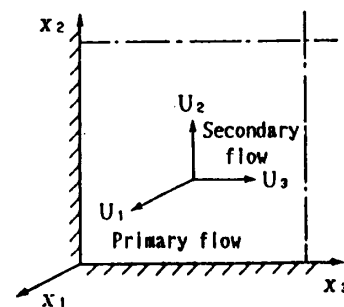


図 1 座標系

究のような熱流速一定の条件を課す場合には、壁面近傍で対数温度分布が成立するものとして境界条件の設定を行う。対数温度分布に対しては、Jayatilke の P 関数を用いた。対称位置に対しては、諸特性の物理的意味を考慮しながら、ノイマンあるいはディリクレの境界条件を与える。計算格子数に関しては、中山⁽¹⁵⁾ら、および Launder-Ying⁽¹⁾の計算結果を踏まえて断面内で 14×14 とした。

発達乱流場における Brundrett-Baines⁽¹⁶⁾の実験結果と比較し、本モデルの妥当性を検討するため、計算パラメータは、レイノルズ数 $Re=83\,000$ とした。さらに本モデルを助走区間流れに適用し、Melling-Whitelaw⁽⁷⁾の実験結果と比較するため、 $Re=42\,000$ にも計算を行った。このとき、助走区間長さは、水力直径の 100 倍とし、計算格子は主流方向に 120 の格子点を設け、全体では $10 \times 10 \times 120$ の格子点を用いた。Melling-Whitelaw の実験においても入口条件が不明であるため、乱流エネルギー K および乱流散逸 ε に対し、 $K=U_b \times 10^{-5}$ 、 $\varepsilon=K^{3/2}/D_h$ と小さな値を設定した。助走区間流れに対しては、主流方向の拡散項は無視して支配方程式を、放物形として計算を行った。

計算の際の支配方程式、ならびに支配方程式中の定数系に関しては前報⁽⁶⁾にて詳述した。

5. 結果と考察

5.1 発達乱流解析 正方形管路内流れの特徴的な流れとして第 2 種二次流れがあるが、これは、垂直応力の差 $(\bar{u}_3^2 - \bar{u}_2^2)$ およびせん断応力 $\bar{u}_2 u_3$ に関する X_2, X_3 方向のこう配値の差により誘起される⁽¹⁷⁾。したがって、特にこれらの二つの応力 $(\bar{u}_3^2 - \bar{u}_2^2)$ 、 $\bar{u}_2 u_3$ に着目し、Brundrett-Baines⁽¹⁶⁾の実験結果と比較を行った。図 2 にその結果を示すが、特徴を明確にするため、前報⁽⁶⁾にて報告した、Launder-Reece-Rodi のモデルによる結果も同時に示してある。各乱流レイノルズ応力は、摩擦速度 U_τ にて無次元化し表示してあ

る。

$\bar{u}_2 u_3$ の分布についてみると、LRR モデル、本モデルとも零ラインが発生しているのに対して、実験では認められない。しかし、本モデルは、 -0.1 ラインが大きく張り出す様相を呈しているのに対し、LRR モデルは零領域が -0.1 を抑える形となっており、本モデルのほうがより実験結果に近いものと考えられる。

垂直応力の差 $(\bar{u}_3^2 - \bar{u}_2^2)$ の分布についてみると、LRR モデルは、中心部近傍にて、負の領域が発生しており、実験結果とは大きく異なる。一方本モデルには、負領域が認められない点で実験結果に近い結果となっているが、 0.1 のラインが実験結果のように中心部まで伸びておらず、改良の余地がある。

以上のように本モデルは、比較的良好に実験結果を予測しており、先に示した平均流による影響を表現した四次相関テンソルが妥当なものであることを示すものと考えられる。

5.2 助走区間乱流解析 正方形管路の助走区間乱流に対して Melling-Whitelaw⁽⁷⁾は $Re=42\,000$ において、レイノルズ応力分布に関する詳細な実験データを $X_1=5.6D_h$ および、 $X_1=36.8D_h$ の位置において示している。彼らは、レーザドップラ流速計を用いて $1/4$ 断面にわたり乱流応力成分の測定を行っている。この Melling-Whitelaw の実験と、本モデルによる解析結果との比較検討を次に示す。図 3 は主流中心速度および、乱流エネルギーの発達の過程を示す。図 4 は $X_1=5.6D_h$ における、各乱流応力成分の等値線図の比較を、図 5 は $X_1=36.8D_h$ における各等値線図の比較を示してある。

図 3 より主流中心速度 U_c は実験、計算ともピーク値をとる分布となっているが、これは境界層が流れ方向に発達していき、管中心部まで各壁面の境界層が発達したためである。管中心部まで発達した境界層は、互いに運動量の交換を行い平均化して一定値へと漸近していく。乱流エネルギーもほぼ同様の傾向を示す。

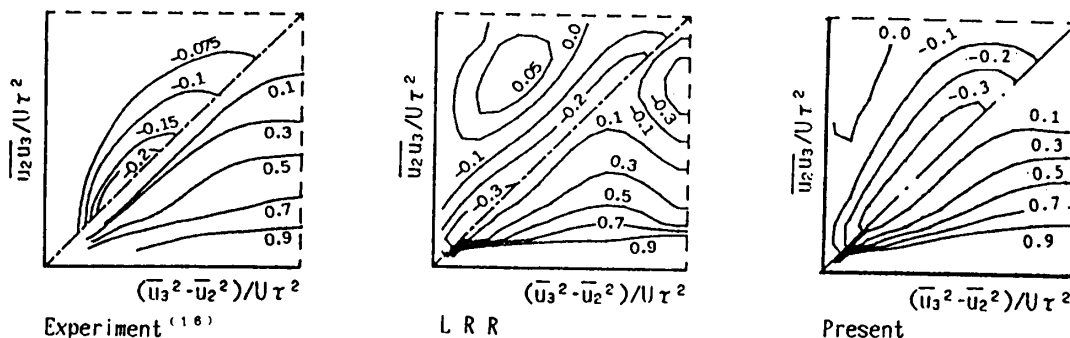


図 2 完全発達乱流解析結果

解析結果の主流中心速度は、実験結果より遅れて発達しており、一方、乱流エネルギーは増加のこう配は似ているものの増加始めの点が約 $15D_h$ ほど下流に位置する結果となった。

これらの相違点は、次の二つの要因に起因しているものと考えられる。第1の要因としては、入口条件が不明であるため、乱流エネルギー、乱流散逸に対して、 $K=U_b^2 \times 10^{-5}$, $\epsilon=K^{3/2}/D_h$ と小さな値を設定したこと。第2の要因としては、乱流エネルギー方程式中の、拡散項に含まれる定数の値を小さく設定した点が考えられる。本解析の場合は、拡散項に対しては、Daly ならびに、Harlow の速度こう配形拡散モデルを用いており、その定数には、Launder-Morse⁽¹⁸⁾の値を用いて計算している。これらの二つの要因のうち、第2の要因は、拡散速度を左右する因子であることを考えれば、第1の要因より寄与率は大きいものと考えられる。

$X_1=5.6D_h$ における各等値線図を比較すると、実験においては、主流速度、垂直応力 $\bar{u}_1^2$, $\bar{u}_2^2$ の分布に関して、対角線上のコーナにおいて、わずかばかりの等値線図の湾曲がみられ、第2種二次流れの発生を思われる。計算結果においては、この湾曲はまだみられない。またせん断応力 $\bar{u}_1\bar{u}_2$ の分布においては、実験および解析結果とも零ラインが認められる。実験と解析結果の等値線図の多少の相違は、先に述べたように、計算結果の主流中心速度の発達が実験のそれより遅いためである。

この種の発達しつつある流れに特有な現象として、せん断応力 $\bar{u}_1\bar{u}_2$ の分布における異符号領域の存在がある⁽⁷⁾。これは第2種二次流れによる等速度線のひずみにより主流速度 U_1 の X_2 , あるいは X_3 方向の速度

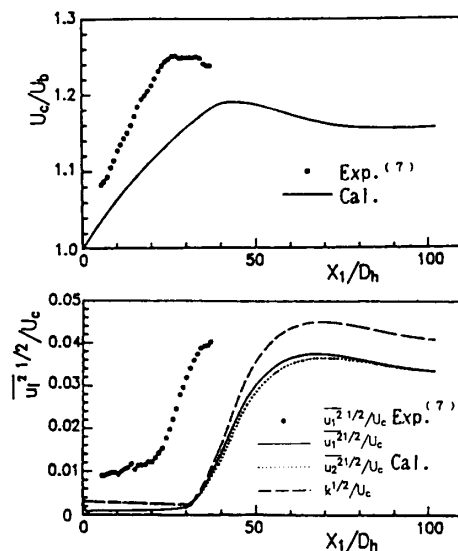


図3 主流中心速度、乱流エネルギーの発達

こう配が場所により正または、負の値をとるためであり発達するにつれてこの影響領域は顕著となる。本計算実験においてもこの異符号領域は $X_1=5.6D_h$ においては明りょうではないものの、 $X_1=36.8D_h$ では十分認識でき、本モデルの妥当性を示唆するものと考えられる。ただし、 $X_1=36.8D_h$ における $\bar{u}_1\bar{u}_2$ の分布は、

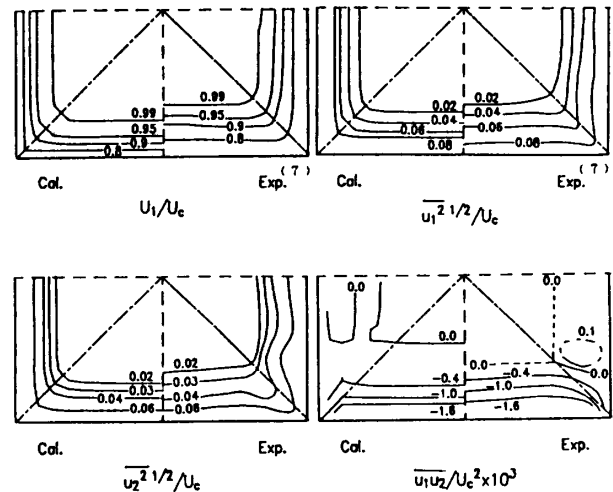


図4 $X_1=5.6D_h$ における各等値線図の比較

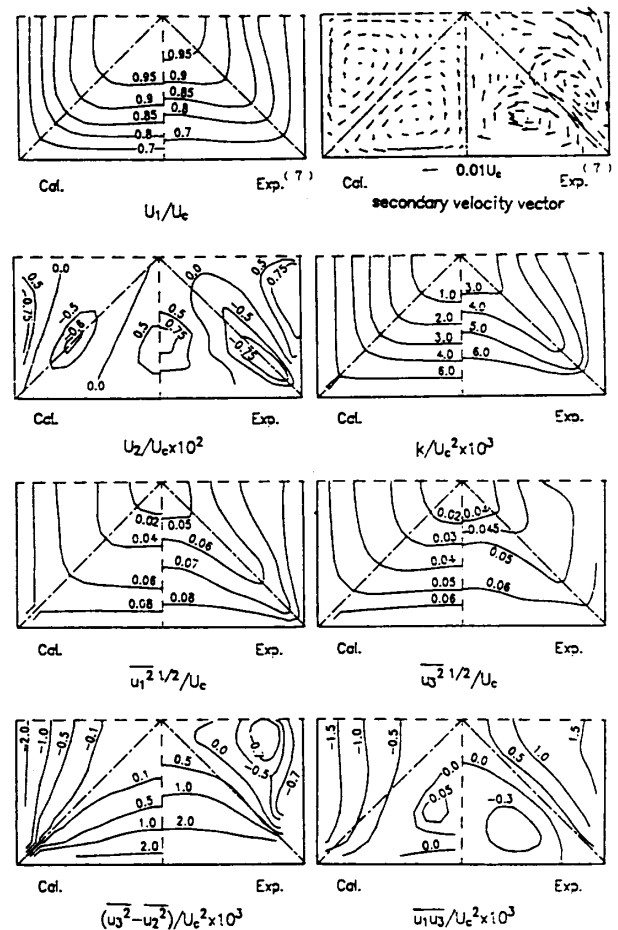


図5 $X_1=36.8D_h$ における各等値線図の比較

$\overline{u_1 u_3}$ の分布を対角線対称としたものと考えられるため $\overline{u_1 u_3}$ の分布をもって検討している。

また, Melling-Whitelaw は, $\overline{u_1^2}$ の分布, $\overline{u_2^2}$ あるいは $\overline{u_3^2}$ の分布より $X_1=5, 6D_h, 36.8D_h$ のいずれの位置においても, 壁面に向かう垂直応力の増加率は, $\overline{u_1^2}$ のほうが大きいことを指摘しているが, 計算においても, 同様の傾向を示している。

第2種二次流れを発生させる要因となる, 垂直応力の差 ($\overline{u_3^2} - \overline{u_2^2}$) の分布は, 完全発達乱流場で比較した, Brundrett-Baines との比較ほど良好には一致していないが, これは先に示した二つの要因によるものと思われ, これらを修正することより改善されるものと考えられる。

実験結果の傾向と大きく異なるのは, 乱流エネルギーを含む垂直応力, および主流速度に関する等値線図の第2種二次流れによる湾曲化でありモデルの検討が必要と思われる。

5.3 助走区間乱流熱流束解析 図6から図8は助走区間における温度場の解析結果である。格子数, レイノルズ数は速度場の場合と同様である。壁面における加熱条件は, 壁面からの熱流束を一定として計算を行った。図6は混合平均温度 T_b , 管中心温度 T_c , 壁面平均温度 T_w および Nusselt 数の主流方向の様子を示したものである。Nusselt 数を算出する際の代表温度差の算出には壁面平均温度と混合平均温度とを用いた。 T_b は熱流束一定であるためほぼ直線的に増加している。 T_w は約 $35D_h$ より上昇し始め入口より発達した温度境界層が管中心まで達したことを意味してい

る。Nusselt 数の変化は, T_b, T_w の温度分布からも明らかに入口近傍約 $X_1=18D_h$ で極小値をとった後, 徐々に一定値へと漸近していく。図7, および図8は, $X_1=5.6D_h, 36.8D_h$ における温度, 乱流熱流束の分布を示したものである。 $\rho \overline{u_1 T'}$, $\rho \overline{u_3 T'}$ は乱れによる熱流束を示すものであり, 一方 $\rho \overline{u_1^2}$, $\rho \overline{u_1 u_2}$ は, 運動量の輸送を示し, $\overline{u_1 T'}$ と $\overline{u_1^2}$, および $\overline{u_3 T'}$ と $\overline{u_1 u_3}$ とが対応する (ただし, $\overline{u_1 u_3}$ の分布は, $\overline{u_1 u_2}$ の分布を対角線対称としたものに対応)。これらの分布を比較すると, $X_1=5.6D_h$ までは, 各分布とも非常に良く似ているのがわかる。しかし, $X_1=36.8D_h$ においては, 主流方向速度分布と温度分布との差は, それほど大きな相違はないものの, 特に $\overline{u_3 T'}$ の分布においては, $\overline{u_1 u_3}$ にみられる異符号領域はみられず両者の相似性が崩れてきていることを意味している。これは, 二方程モデルによる解析などで良く用いられる乱流プランツル数一定, すなわち, $Pr_t = \overline{u_1 u_3} (\partial T / \partial x_3) / \overline{u_3 T'} (\partial U_1 / \partial x_3)$ の関係式が成立しなくなることを示唆している。

6. 結 論

レイノルズ応力方程式, 乱流熱流束方程式を用い発達しつつある正方形管路内の熱流動に関する解析を行った。その際レイノルズ応力方程式のモデル化に際しては, 代数応力モデルを用い, 再配分項中の平均流の影響を含む項について改良を加え, Brundrett-Baines の実験と比較し検討を行った。また, 乱流熱流束方程式に対しても, 対流項, 拡散項を代数式で置き換える

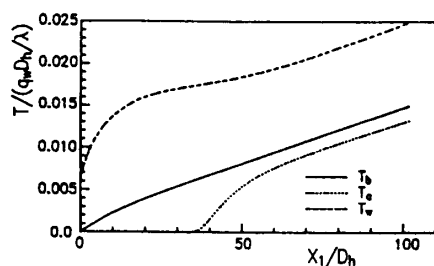


図6 温度, Nusselt 数の発達

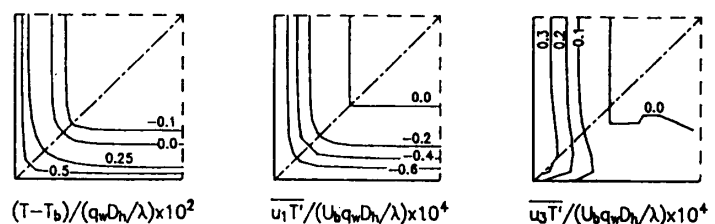


図7 $X_1=5.6D_h$ における温度等値線図

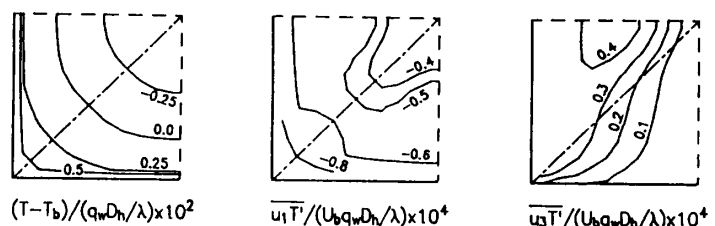


図8 $X_1=36.8D_h$ における温度等値線図

操作をし、発達しつつある正方形管路内に適用し検討を行った。その結果次の結論を得た。

圧力ひずみ相関項中の平均流の影響を示す、四次相関テンソルを導出する際に、制約条件 $(\partial U_i / \partial x_m) \cdot a_m^i = 0$ を課すことにより、Brundrett-Baines の発達乱流解析結果と比較的良好な結果を得ることができた。この改良モデルを、助走区間流れに適用し、Melling-Whitelaw の実験と比較すると、主流中心速度、主乱流エネルギーの発達に多少相違が認められるものの、各乱流応力成分の分布を定性的に予想することができ、本モデルの妥当性を示すものと思われる。

また、温度場での非等方性を乱流熱流束方程式を解くことにより、レイノルズ応力分布、乱流熱流束分布を比較し、運動量輸送と熱輸送の相似性が発達するにつれ崩れていくことを定量的に示した。

以上のように、速度場、温度場における非等方性乱流場を代数応力モデルを用いることにより、多大な計算時間を費やすことなく解析することが可能であり、経済的、精度的にも工業的に応用できるモデルであると考えられる。

文 献

- (1) Launder, B. E. and Ying, W. H., *Heat Fluid Flow*, 3-2(1973), 115-121.
- (2) Naot, D., Shavit, A. and Wolfshtein, M., *Phys. Fluids*, 16(1973), 738-743.
- (3) Launder, B. E., Reece, G. J. and Rodi, W., *J. Fluid Mech.*, 68(1975), 537-566.
- (4) Gibson, M. M. and Launder, B. E., *Trans. ASME, Ser. C*, (1976), 81-87.
- (5) Gessner, F. B. and Emery, A. F., *Trans. ASME, Ser. I*, (1976), 261-268.
- (6) 秋山・河村・芹沢・杉山・功刀・西脇, 機論, 55-510, B(1989), 351-357.
- (7) Melling, A. and Whitelaw, J. H., *J. Fluid Mech.*, 78(1976), 289-315.
- (8) Rodi, W., *Z. Angew. Math. Mech.*, 56(1976), 219-221.
- (9) Chou, P. Y., *Q. Appl. Math.*, 3(1945), 38-54.
- (10) Rotta, J., *Zeitschrift für Physik*, (1951), 547-572.
- (11) Hanjalic, K. and Launder, B. E., *J. Fluid Mech.*, 52(1972), 609-638.
- (12) Gessner, F. B. and Eppich, H. M., *Proc. 3rd Symp. Turbulent Shear Flows*, (1981), 2.25-2.32.
- (13) Champagne, F. H., Harris, V. G. and Corrsin, S., *J. Fluid Mech.*, 41(1970), 81-139.
- (14) Harris, V. G., Graham, A. H. and Corrsin, S., *J. Fluid Mech.*, 81(1977), 657-687.
- (15) 中山・Chow, W. L. ・Sharma, D., 機論, 49-447, B(1983), 2559-2567.
- (16) Brundrett, E. and Baines, W. D., *J. Fluid Mech.*, 19(1964), 375-394.
- (17) Demuren, A. O. and Rodi, W., *J. Fluid Mech.*, 140(1984), 189-222.
- (18) Launder, B. E. and Morse, A., *Turbulent Shear Flow*, 1(1979), 279-294.