

代数応力モデルの壁近傍への拡張*

杉山 均^{*1}, 秋山 光庸^{*1}, 二宮 尚^{*1}
平田 賢^{*2}, 久保 真治^{*1}

An Algebraic Stress Model for Near-Wall Regions

Hitoshi SUGIYAMA, Mitsunobu AKIYAMA, Nao NINOMIYA,
Masaru HIRATA and Shinji KUBO

The algebraic stress model for high Reynolds number is extended to the near-wall region of low Reynolds number. In developing the model, convection and diffusion terms are approximated to take viscous effect into consideration by applying Rodi's proposal. The pressure strain term and dissipation term of the Reynolds stress equation are modified by introducing the invariant function. The transport equations for turbulent energy and the dissipation are standard two-equation models adopted for the near-wall region. To examine the proposed model, numerical analysis has been performed on a fully developed turbulent flow in a square duct. Calculated results are compared with the experimental data available and the calculated results obtained by using an algebraic stress model for high Reynolds number. The proposed model can predict more precisely wall shear stress and normal stress in the mean flow direction than can the model for high Reynolds number, but the results of normal stress in the secondary flow direction are slightly different from the experimental data.

Key Words: Numerical Analysis, Turbulent Flow, Secondary Flow, Reynolds Stress Model, Square Duct, Near-Wall Region

1. 結 言

三次元乱流現象を数値的に予測する一手法として、モデル化されたレイノルズ応力の輸送方程式を解くレイノルズ応力モデルがある。モデル化の際に、特に重要となるのが、圧力-ひずみ相関項であるが、この項のモデル化の代表的なものとして Launder-Reece-Rodi⁽¹⁾ のモデルが挙げられる。このレイノルズ応力モデルを用いた解析例には、高レイノルズ数流れを対象とした例が多く、したがって乱流エネルギー、乱流散逸などの境界条件には計算第1点めで、対数則と局所平衡状態が成立することを仮定した壁関数が用いられる。

しかし、対数則が適用できない流れもあり、壁面近傍流れをも、表現できるモデルが必要となる。この種のモデルに関しては、Hanjalic-Launder⁽²⁾、島⁽³⁾、Prud'homme-Elghobashi⁽⁴⁾、山本ら⁽⁵⁾により報告されているが、その研究例は少ない。

著者らは、これまで、レイノルズ応力方程式中の圧力-ひずみ相関に、一部改良を加え⁽⁶⁾、計算の簡便性、

経済性を考え、代数応力モデルを用いて、各種三次元乱流の解析を行ってきたが⁽⁷⁾、いずれの解析も、高レイノルズ数形モデルを用いた解析であり、壁面近傍まで、従来のモデルを適用できるよう改良を加えることが必要と思われる。

そこで、高レイノルズ数形の応力モデルを壁面近傍にまで適用可能なようにモデルの改良を行うと同時に、実際の流れ場に適用し、高レイノルズ数形の応力モデルとの比較を行うことを研究目的とする。計算対象とする流れ場は、実験も比較的多く、計算例も多い十分発達した正方形断面管内乱流を選んだ。この流れ場は、等方的渦粘性仮定では予測できない、第2種二次流れを伴い、高次の乱流モデル開発のための流れ場として取りあげられている。

本研究においては、比較的多くの乱流特性量が明示されている藤田ら⁽⁸⁾の実験結果を対象に計算を行う。

2. 記 号

A : 不変量

a_{ij} : 非等方テンソル

B : 正方形一辺長の半分

$C_1, C_2, C_1^*, C_1', C_2^*, C_2', C_\mu, C_k, C_\epsilon, C_{\epsilon 1}, C_{\epsilon 2}$

: 経験定数

* 平成4年5月28日 第29回日本伝熱シンポジウムにおいて講演、原稿受付 平成3年10月7日。

^{*1} 正員、宇都宮大学工学部(〒321 宇都宮市石井町 2753)。

^{*2} 正員、芝浦工業大学システム工学部(〒330 大宮市深作 307)。

Diff_{ij}: レイノルズ応力方程式の拡散項

D_h : 水力直径

$f(L/x_w)$: 壁の影響を示す関数

k : 乱流エネルギー

L : 特性距離

Re : レイノルズ数 $= U_b D_h / \nu$

u_i : i 方向時間変動速度成分

$\overline{u_i u_j}$: レイノルズ応力

U_i : i 方向時間平均速度分布

U_b : 混合平均速度

x_i : 物理平面上の i 方向座標軸

ε : 乱流散逸

ν : 粘性係数

ν_t : 渦動粘性係数 $= c_\mu k^2 / \varepsilon$

π_{ij} : 圧力-ひずみ相関項

ρ : 密度

τ_w : 壁面せん断応力

3. 乱流モデル

3・1 応力方程式の壁面近傍への拡張 応力方程式の厳密形は次式で示される。

$$\begin{aligned} \frac{D \overline{u_i u_j}}{Dt} = & - \overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \\ & P_{ij} : \text{production} \\ & + \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ & \pi_{ij} : \text{pressure-strain correlation} \\ & - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\overline{u_i u_j u_k} - \nu \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} - \frac{p}{\rho} (\delta_{jk} \overline{u_i} + \delta_{ik} \overline{u_j}) \right] \\ & \text{Diff}_{ij} : \text{diffusion} \\ & - 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \dots\dots\dots (1) \\ & \varepsilon_{ij} : \text{dissipation} \end{aligned}$$

従来の高レイノルズ数流れの場合、数値計算のうえで障害となる対流項、拡散項については、Rodi⁽⁹⁾ 近似を用いて、計算の簡便性を図った。また、問題となる圧力-ひずみ相関項に対しては、四次相関テンソルの制約

表 1 圧力-ひずみ相関項のモデル化

$\pi_{i,j,1} + \pi_{j,i,1}$	$-c_1 \frac{\varepsilon}{k} (\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij})$
$\pi_{i,j,2} + \pi_{j,i,2}$	$-\frac{c_2 + 8}{11} (P_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij}) + \zeta k (\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i})$ $-\frac{8c_2 - 7}{11} (D_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij})$
$[\pi_{i,j,1} + \pi_{j,i,1}]_w$	$c_1 = c_1' + c_1'' f(\frac{L}{x_w}), c_2 = c_2' + c_2'' f(\frac{L}{x_w}), \zeta = \zeta' + \zeta'' f(\frac{L}{x_w})$

$$P_{ij} = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \overline{u_j u_i} \frac{\partial U_j}{\partial x_i}$$

$$P_k = -\overline{u_k u_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_k}$$

$$D_{ij} = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \overline{u_j u_i} \frac{\partial U_j}{\partial x_i}$$

条件に一部改良を加え⁽⁶⁾、表 1 のようにモデル化を行った。

前述の従来モデルを、壁面近傍まで拡張するには、粘性領域の影響を加味することが必要となる。拡散項のうち、乱れ相関による拡散を、Daly-Harlow⁽¹⁰⁾ のこう配拡散モデルに代表させ、圧力変動による拡散を無視すると、上式の拡散項は、次のように示される。

$$\begin{aligned} \text{Diff}_{ij} = & c_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_l} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} \right) \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

上式の拡散項、および対流項に対して Rodi 近似を行う。ここで

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} \right) \\ = & \nu \frac{\partial k}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\overline{u_i u_j}}{k} \right) + \nu k \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \left(\frac{\overline{u_i u_j}}{k} \right) \\ & + \nu \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \frac{\partial^2 k}{\partial x_k^2} + \nu \frac{\partial k}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\overline{u_i u_j}}{k} \right) \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

であり、 $(\overline{u_i u_j}/k)$ の変化が比較的緩慢であることを仮定して、その値を含む項を省略すると次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} \right) = \nu \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \frac{\partial^2 k}{\partial x_k^2} \dots\dots\dots (4)$$

この式と、後に示す乱流エネルギーの式を用いて、壁面近傍に、Rodi 近似を拡張する。これより対流項、拡散項に対して次の関係式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{D \overline{u_i u_j}}{Dt} - \text{Diff}_{ij} \\ = & \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \left[P_k - \varepsilon - 2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_j} \right)^2 \right] \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

$$P_k = -\overline{u_k u_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \dots\dots\dots (6)$$

次に問題となるのが、圧力-ひずみ相関項のモデル化であるが、この項は、表 1 に示すように、純粋な乱れ相関による項、 $\pi_{ij,1}$ (Rotta 項, return-to-isotropy 項, slow 項とも呼ばれる)、平均速度こう配の影響を含む項 $\pi_{ij,2}$ (rapid 項とも呼ばれる)、および壁面による影響を含む項、 $\pi_{ij,w}$ より構成されている。

一般に、壁近傍での速度を、壁からの距離の関数として、 $\pi_{ij,1}$ に関する、壁への漸近挙動を検討するとこの項は、壁面で零となることが要求される⁽¹¹⁾。しかし、 $\pi_{ij,1}$ を構成するレイノルズ応力の非等方性を示す無次元テンソル

$$a_{ij} = \left(\frac{\overline{u_i u_j}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \right) \dots\dots\dots (7)$$

は壁面では零とならず、したがってその定数 c_1 が壁面で、零となることが要求される。

現在のモデルでは、この条件を満足しておらず改良することが必要となる。従来、定数系に対しては、流れ

の長さスケール, $L=k^{3/2}/\varepsilon$ と, 壁からの距離, x_w との比の関数とし

$$f\left(\frac{L}{x_w}\right)=\frac{c_\mu^{3/4}k^{3/2}}{x\varepsilon}\cdot\frac{1}{x_w}\quad\cdots\cdots(8)$$

を導入し, 壁面近傍で 1, 壁から離れるにつれて減少するように定義し, 壁の影響を定数に反映させている。しかし, 壁面上では零とはならない。そこで Lumley⁽¹²⁾ により導入された不変量 A を用い, 壁面近傍流れ, 単純せん断流の実験結果を基に, 定数 c_1 を次のように拡張した。

$$c_1=0.97A+0.92A^{1/2}\quad\cdots\cdots(9)$$

$$A=1-\frac{9}{8}(A_2-A_3)$$

$$A_2=a_{ij}a_{ji}\quad A_3=a_{ij}a_{jk}a_{ki}$$

ここで, a_{ij} は, 式(7)に示す非等方テンソルで, A_2 , A_3 は, そのテンソルの第 2, 第 3 不変量である。また, A_2 , A_3 より定義される不変量 A は, 等方的流れ場では 1, 固体壁上では零($0\leq A\leq 1$)となり, 乱れの二次元性を示す指標ともなるものである。

残りの定数 c_2 , ζ に対しても, 不変量 A を導入することにより, 壁面まで適用可能なよう拡張する。これらの定数は, 壁面で零となる必要はなく, 次のように定義した。

$$c_2=c_2^*+c_2'(1-A^3)$$

$$\zeta=\zeta^*+\zeta'(1-A^3)\quad\cdots\cdots(10)$$

上式中の係数は, c_1 同様, 壁面近傍流れ, 単純せん断流の実験結果を基に決定する。

従来のモデルでは, 流れ場の形状が複雑となると, $f(L/x_w)$ の定義が難しくなる難点を内包していたが, 不変量で表現することにより, この点が解除でき, よりはん用性のあるモデルとなる。

次に散逸項についての拡張を考える。高レイノルズ数流れにおいて, 散逸は等方的であるとして,

$$\varepsilon_{ij}=2\nu\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}=\frac{2}{3}\delta_{ij}\varepsilon\quad\cdots\cdots(11)$$

とモデル化される。一方, 壁面近傍においては, 非等方的な散逸を仮定し, それが, おおののレイノルズ応

力成分に比例するとして

$$\frac{\overline{u_i u_j}}{k}\varepsilon\quad\cdots\cdots(12)$$

と近似される⁽¹³⁾。従来, これらの式を, 何らかの関数で接続する手法が用いられてきたが, ここでも不変量 A を導入し, Fu-Launder-Tselepidakis⁽¹¹⁾ にならい, 次のようにモデル化する。

$$\varepsilon_{ij}=\frac{2}{3}\delta_{ij}\varepsilon A^{1/2}+(1-A^{1/2})\frac{\overline{u_i u_j}}{k}\varepsilon\quad\cdots\cdots(13)$$

以上で壁近傍への拡張は完了する。

乱流エネルギー k , 乱流散逸方程式 ε に対しては標準的な, Jones-Launder⁽¹³⁾ のモデルを用いて計算することにした。ただし, 生成項は, レイノルズ応力成分にて構成されている。表 2 に, モデル化されたレイノルズ応力方程式, k , ε 輸送方程式, および定数系を示す。

4. 解析手法

4.1 座標系 流れ場として, 正方形断面形状を有する管路を対象とする。座標系は, 図 1 に示すように主流方向を x_1 , 亜流方向を x_2 , x_3 と定義する。計算領域は系の対称性を考えて全断面の 1/4 にて行うものとした。

4.2 正方形断面管内乱流実験 正方形断面管路内乱流に関する実験は, 数多く報告されているが⁽¹⁴⁾⁽¹⁵⁾, ここでは, 藤田ら⁽⁸⁾ の示した実験を計算対象とした。レイノルズ数 $Re=65\,000$ において, 乱流特性量を, $x_1=89.8\,Dh$ (全長 4 500 mm, 一辺の長さ 50 mm) の位置で測定している。測定に際しては, 熱線風速計を用いている。

数値計算は, 有限体積法により行った。計算格子はスタカード格子を用い, 対流項の差分近似については速度に対して QUICK (三次精度の風上差分), 乱流特性量である k , ε については PLDS, (セル Peclet 数のべき乗で表現される差分スキーム) をおのおのを使用した。圧力については, 連続の式より圧力補正式を

表 2 方程式および定数系

$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\overline{u_i u_j}}{k}\right)\{P_{ij}-\varepsilon-2\nu\left(\frac{\partial\sqrt{k}}{\partial x_j}\right)^2\}=P_{ij}-c_1\left\{\frac{\varepsilon}{k}(\overline{u_i u_j}-\frac{2}{3}\delta_{ij}k)\right\}$	
$- \frac{c_2+8}{11}\left(P_{ij}-\frac{2}{3}P_k\delta_{ij}\right)+\zeta\left(\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_j}+\frac{\partial\overline{u_j}}{\partial x_i}\right)k+\frac{2-8c_2}{11}(D_{ij}-\frac{2}{3}P_k\delta_{ij})$	
$-\frac{2}{3}\delta_{ij}\varepsilon A^{1/2}-(1-A^{1/2})\frac{\overline{u_i u_j}}{k}\varepsilon$	
$\frac{Dk}{Dt}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nu\frac{\partial k}{\partial x_i}+c_k\frac{k}{\varepsilon}\overline{u_i u_i}\frac{\partial k}{\partial x_i}\right)-P_k-\varepsilon-2\nu\left(\frac{\partial\sqrt{k}}{\partial x_i}\right)^2$	
$\frac{D\varepsilon}{Dt}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nu\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}+c_\varepsilon\frac{k}{\varepsilon}\overline{u_i u_i}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}\right)-c_\varepsilon f_1\frac{\varepsilon}{k}P_k-c_\varepsilon f_2\frac{\varepsilon^2}{k}+2\nu\nu_i\left(\frac{\partial^2\overline{u_i}}{\partial x_i\partial x_i}\right)$	
$f_1=1.0\quad f_2=1.0-0.3\exp(-Rt^2)\quad f\mu=\exp\{-2.5/(1.0+Rt/50)\}\quad Rt=k^2/\nu\varepsilon$	
$c_k=0.22$	$c_\varepsilon=0.18$
$c_2^*=0.44$	$c_2'=-0.12$
$\zeta^*=-0.16$	$\zeta'=-0.1$

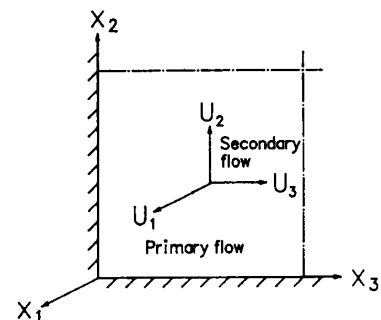


図 1 座標系

導き連続の式を満足するように速度および圧力の補正を行う手法(SIMPLE法)を用いた。また、主流方向の圧力こう配は、放物形流れを解析する場合と同様に管断面を通過する全質量の保存式によった。

計算格子数は 40×40 とし、計算格子は壁面で細くなる不均等メッシュとした。同時に、高レイノルズ流れのモデルを用いても計算を行い、両者の比較を試みた。その際、壁関数の境界条件が適用可能なよう、無次元距離で $30 \sim 40$ 程度になるように、計算第1点めを設定し、それ以降の点は、拡張モデルの計算格子点位置と一致するように設定し計算を行った。

5. 結果と考察

5.1 平均速度場の比較 図2は、主流方向速度等値線図の、高レイノルズ数形モデル、壁面近傍拡張モデルによる計算結果と、藤田らの実験結果と比較したものである。実験においては、0.98の等値ラインが中心部にかなり寄って観察されるのに対し、計算ではいずれのモデルも中心部より離れた領域に認められる。しかし、拡張モデルのほうがより中心部に近く、高レイノルズ数形モデルに比べ、改善されていることがわかる。第2種二次流れによる等値線図のひずみの程度は、両者とも実験ほど顕著ではない。

図3は、この種の流れに特徴的な、第2種二次流れを示す。この第2種二次流れは、圧力こう配の変化により発生する二次流れとは異なり、乱れの非等方性により発生するものであり、したがって、その強度も混合平均速度の数%と小さな値を取る。計算においては、いずれのモデルでも、渦中心は、壁面近傍に存在し実験結果とは異なる。梶島ら⁽¹⁶⁾は、LESモデルを用いて、同じ藤田らの実験を解析しているが、渦中心位置は、LESモデルにおいても、本計算結果と同様の傾向を示している。

5.2 レイノルズ応力値の比較 図4に、乱流エネルギーの等値線図の比較を示す。実験においては、コーナ部に向かって、等値線図の顕著な突出が認められるが、計算においては、それほどのひずみは認められない。しかし、拡張モデルと高レイノルズ数形モデルとを比較すると、拡張モデルのほうが、ひずみの程度は、大きいようである。一方、実験、高レイノルズ数形モデルでは、中心部領域に2.0のラインが認められるが、拡張モデルでは現れてこない。

図5は、主流方向速度変動の等値線図を比較したものである。実験においては、乱流エネルギー同様、第2種二次流れによるコーナ部への等値線の突出が認められる。特に、管中心部領域における0.04、0.045の等値

ラインは、すでに湾曲化して第2種二次流れがこの領域でも影響を及ぼしていることがうかがえる。等値線のひずみの程度は、実験ほどでないものの、拡張モデルは、比較的良好に実験値を予測している。

図6は、水平方向速度変動の各等値線図を比較したものである。水平方向速度成分は、垂直壁(x_2 軸方向)より、水平壁近傍(x_3 軸方向)において大きく発達した領域が観察されるが、これは垂直壁近傍において、そ

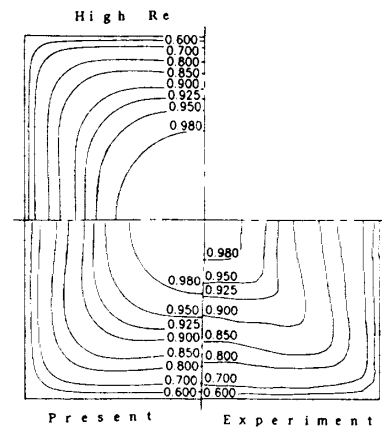


図2 主流方向速度等値線比較

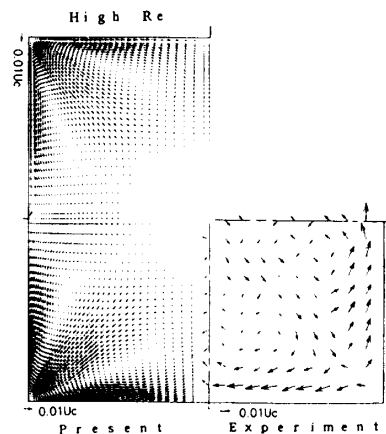


図3 第2種二次流れベクトル比較

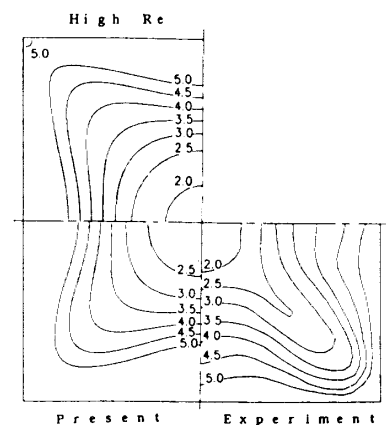


図4 乱流エネルギー等値線比較

の変動が抑制されるためであり、この傾向は計算においては顕著に見られる。実験においては、管中心部に0.03, 0.325の等値線図が見られるが、計算においては、いずれのモデルでも見られない。計算においては、水平方向速度変動は、大きく見積もられる傾向にある。また、実験において等値線図の突出が認められるが、計算においては、実験ほど明確でない。これは、Rodi近似により、対流項を代数式と、近似したことによるものと考えられる。亜流方向の速度変動も、正確に予測することが要求される場合には、微分形として解くことが必要であろう。以上のような特徴は、垂直方向速度変動においても、同様に認められた。

図7は、レイノルズ応力 $\overline{u_1 u_3}$ の、各等値線図を比較したものである。特徴的な点として、左右対称軸上近傍に、異符号領域が存在する点が挙げられる。これは、第2種二次流れにより、主流方向速度等値線がひずまされる結果発生するものと解釈される。高レイノルズ数モデル、拡張モデルとも異符号領域は予測しているが、拡張モデルのほうが、その領域、等値線の値とも実験結果に近く、改善されていることがわかる。せん断応力 $\overline{u_1 u_3}$ 分布に対角線対称に相当する、せん

断応力 $\overline{u_1 u_2}$ も、同様の傾向を示している。

図8は、垂直応力差 $(\overline{u_3^2} - \overline{u_2^2})$ の等値線図を、比較したものである。この垂直応力の差の等値線図は、対角線対象となるはずであるが、実験では、その対称性が崩れている。高レイノルズ数モデルと、拡張モデルを比較すると、高レイノルズ数モデルにおいては、管中心部近傍において、零ラインを境に、中心部側に ± 0.1 の等値線が存在するが、拡張モデルにおいては存在するものの非常に小さい領域となっており、より妥当な値を示している。本来なら、これら ± 0.1 の等値ラインは、存在しないはずである。以上のように拡張モデルは、高レイノルズ数モデルよりも改良されているものの、実験結果と比較すると、まだ十分とはいえず、改善が必要であろう。

次に、各断面せん断応力について比較したものを図9に示す。実験結果を見ると $x_3/B=0$ に近づくにつれて、壁面せん断応力値が、減少しているのが認められる。この現象も、第2種二次流れに起因した現象である。すなわち、壁面近傍の速度の遅い流体が、第2種二次流れにより、管中心部へ移動する結果、速度こう配が小さくなり、せん断応力値は減少することとなる。

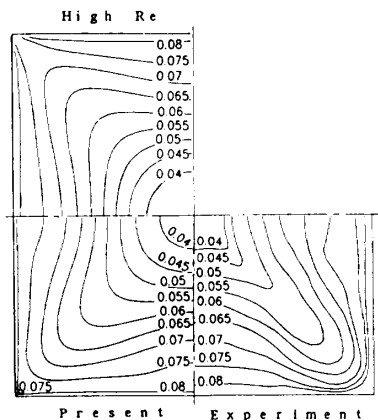


図5 主流方向速度変動等値線比較

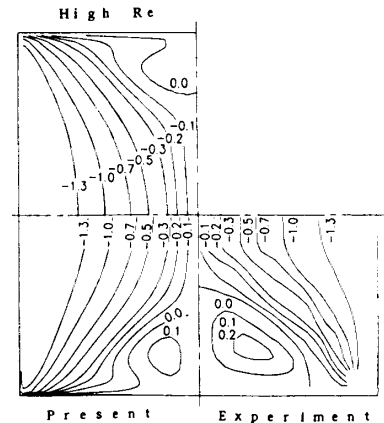


図7 せん断応力 $\overline{u_1 u_3}$ 等値線比較

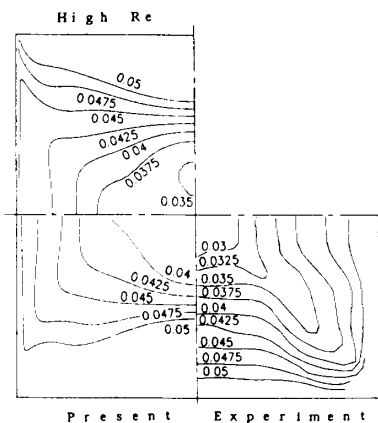


図6 水平方向速度変動等値線比較

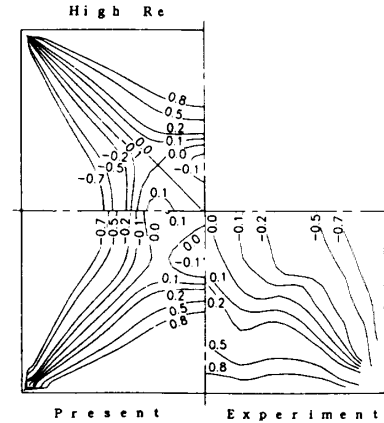


図8 $(\overline{u_3^2} - \overline{u_2^2})$ 等値線比較

図9よりわかるように、高レイノルズ数モデルでは、この現象を捕捉していないが、拡張モデルは、実験結果を比較的良好に予測している。

5.3 不変量解析 次のような、乱流場における非等方性の割合を示すパラメータ

$$b_{ij} = \left(\frac{u_i u_j}{2k} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \right) \dots\dots\dots (14)$$

を定義し、このテンソルに直交軸変換を行ったテンソルに対する固有方程式の係数に着目すると次の不変量を得る。

$$I' = b_{ij}$$

$$II' = (b_{ij} b_{ji} - b_{ii}^2) / 2 \dots\dots\dots (15)$$

$$III' = (b_{ii} b_{jj} b_{kk} - 3b_{ii}^2 b_{jj}^2 + 2b_{ii}^3) / 3$$

上式で b_{ii}^2 は $b_{ij} b_{ji}$ の縮約、 b_{ii}^3 は $b_{ji} b_{jk} b_{ki}$ の縮約を表す。

ここで、第1不変量 I' の縮約は零であることより、非等方的な流れの状態は、式(15)より次の二つの不変量

$$II = -b_{ij} b_{ji} / 2$$

$$III = b_{ij} b_{jk} b_{ki} / 3 \dots\dots\dots (16)$$

により表現でき、Lumley⁽¹²⁾ は、II, IIIを用いて乱流を特徴づける状態図を示した。その状態図に、本解析で使用した、高レイノルズ数モデル、拡張モデルの結果をプロットしたものが図10である。プロット点は壁面最近傍点、対称軸上、および x_2 軸、 x_3 軸を10等分した交差点である。いずれのモデルにおいても、等方的な流れを含みながら、軸対称流れの曲線 $[III = \pm 2(-II/3)^{3/2}]$ にはさまれる結果となった。拡張モデルの場合には、二次元乱流を示す曲線に点在し、壁面近傍において二次元乱流となっていることを示している。ただし、二次元乱流を示す曲線より値が、多少上に位置しており、検討が必要と思われる。

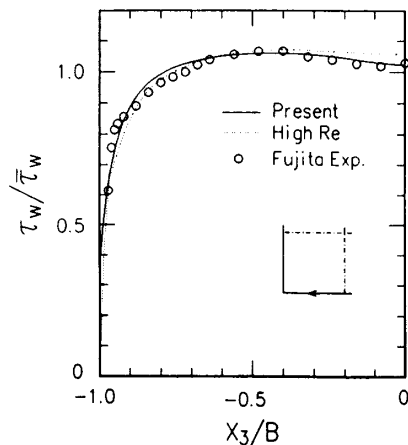


図9 壁面せん断応力比較

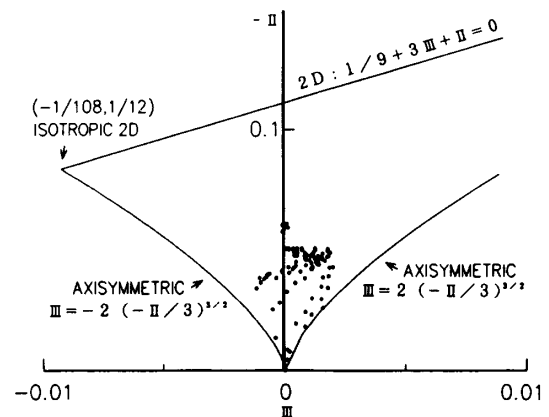
6. 結 論

従来の、高レイノルズ数形の代数応力モデルを壁面まで適用可能なようモデルの拡張を行った。その際に Rodi 近似の壁面への拡張、ならびに、定数系、散逸項を不変量により表現した。従来、定数系は、計算対象形状に適用するよう、壁面の影響を示す関数を決めていたが、不変量を導入することにより流路形状を気にすることなく、壁面効果を加味することが可能となり、モデルのはん用性を高めることができる。

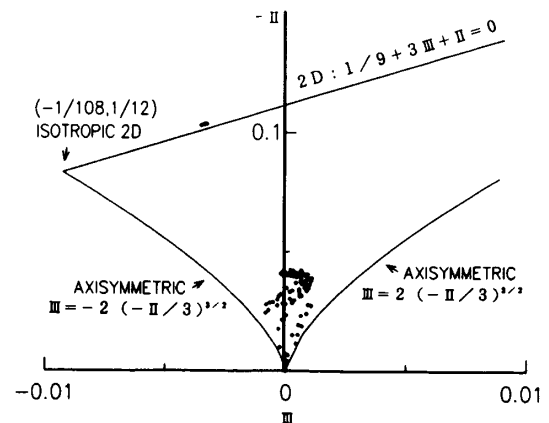
その妥当性を検討するため、拡張モデル、および高レイノルズ数形モデルを、十分発達した正方形断面管路内乱流に適用し、両者の計算結果を実験結果とともに比較し、次の結論を得た。

(1) 拡張モデルは、主流方向速度の絶対値、等値線図のひずみなどは、比較的良好に予測しているが、乱流エネルギーの絶対値は、大きく見積もる傾向にある。しかし、等値線図のひずみの程度は、高レイノルズ数形モデルより多少大きく実験値に近い。

(2) 拡張モデル、高レイノルズ数モデルとも実験



(a) 高レイノルズ数モデル



(b) 拡張モデル

図10 不変量状態図

値と大きく異なる結果となったのは、亜流方向速度変動である。これは、代数応力モデルとしたことに起因すると思われ、これらの値も正確に予測するには、微分形として、レイノルズ応力方程式を解くことが必要と思われる。

(3) 主流方向変動と亜流方向変動との相関値の予測において拡張モデルは、高レイノルズ数モデルより実験値に近い値を予測することができた。

(4) 壁面せん断応力は、左右対称軸近傍で減少する傾向を示すが、拡張モデルはこの傾向をとらえ、実験値と比較的良好に一致した。

文 献

- (1) Launder, B. E., Reece, G. J. and Rodi, W., *J. Fluid Mech.*, **68**(1975), 537-566.
- (2) Hanjalic, K. and Launder, B. E., *J. Fluid Mech.*, **74**(1976), 593.
- (3) Prud'homme, M. and Elghobashi, S., *Proc. 4th Symp. Turbulent Shear Flows*, (1983), 1. 7.
- (4) 島, 機論, **51**-465, B(1985), 1631-1636.
- (5) 山本・荒川・田古里, 機論, **56**-522, B(1990), 460-466.
- (6) 杉山・秋山・芹沢, 機論, **56**-531, B(1990), 3328-3335.
- (7) 杉山・秋山・平田・上野, 機論, **57**-539, B(1991), 2269-2276.
- (8) 藤田・横沢・広田, 日本機械学会第2回CFDワークショップ配布資料, (1989).
- (9) Rodi, W., *Z. Angew. Math. Mech.*, **56**(1976), 219-221.
- (10) Daly, B. J. and Harlow, F. H., *Phys. Fluids*, **13**(1970), 2634-2649.
- (11) Fu, S., Launder, B. E. and Tselepidakis D. P., *Dep. Mech. Eng. UMIST*, (1987), TFD/87/5.
- (12) Lumley J. L., *Advances in Applied Mechanics.*, **18**(1978), 123, Academic Press.
- (13) Jones, W. P. and Launder, B. E., *Int. J. Heat Mass Trans.*, **15**(1972), 301-314.
- (14) Brundrett, E. and Baines, W. D., *J. Fluid Mech.*, **19**(1964), 375-394.
- (15) Melling, A. and Whitelaw, J. H., *J. Fluid Mech.*, **78**(1976), 289-315.
- (16) 梶島・三宅・西本, 第3回数値流体力学シンポジウム論集, (1989), 359-362.