

正方形断面を有する 90° 曲がり管路内乱流の応力場解析*

杉 山 均^{*1}, 秋 山 光 庸^{*1}
藤 田 修^{*2}, 佐 藤 誉 之^{*2}Numerical Analysis of Reynolds Stresses for Developing Turbulent Flow
in a Square-Sectioned 90 Degree BendHitoshi SUGIYAMA, Mitsunobu AKIYAMA,
Osamu FUJITA and Takayuki SATO

A computational study on developing turbulent flow in a square-sectioned 90 degree bend at Reynolds number of 4×10^4 is reported. The ratio of bend mean radius of curvature to hydraulic diameter is 2.3 and straight ducts 45 and 30 hydraulic diameters long are attached to the inlet and outlet planes of the bend, respectively. In calculation, an algebraic Reynolds stress model was adopted in order to predict anisotropic turbulence precisely, and a boundary fitted coordinate system was introduced as the method of coordinate transformation. Calculated results were compared with the experimental data measured separately by two research groups. In this research, special attention is paid to the comparison of calculated results with the distribution of the Reynolds stresses. Moreover, the production mechanism of streamwise velocity fluctuation is examined by evaluating its production term for calculated results. In consequence of this calculation, it was found that the present method predicted relatively well the characteristic features of Reynolds stresses, although there are a few points of discrepancy. The examination of the production term for streamwise velocity fluctuation suggests that the production term including the streamwise velocity gradient with respect to bend angle plays an important role in its generation near the both side walls.

Key Words: Numerical Analysis, Secondary Flow, Turbulent Flow, Square-Sectioned 90 Degree Bend, Reynolds Stress Model, Boundary-Fitted Coordinate System

1. 緒 言

曲がり管路内の流れは、古くより、多くの研究が報告されているにもかかわらず、現在においても、各方面から数多くの研究が報告されている^{(1)~(3)}。このことは、曲がり管路が工業上重要な機械要素であることを証明しているのみならず、研究のうえからも、興味ある複雑な現象を内包していることを示唆するものである。

著者ら⁽⁴⁾は、乱流場における助走区間を有する正方形断面曲がり管路内に共存する、第1種および第2種二次流れを、曲がり管路内の興味ある現象としてとらえ、その遷移挙動の三次元数値解析を試みた。解析対象とした流れは、Humphrey-Whitelaw-Yee⁽⁵⁾が行った90°曲がり管路であり、曲がり半径比2.3(水力直径に対する曲がり流路中心までの半径比)と比較的曲がりのきつい流路である。一方、須藤・板野⁽⁶⁾は、Humphrey-Whitelaw-Yee⁽⁵⁾の実験を対象に曲がり半径比2.0、同一レイノルズ数に対し、Humphreyら

の結果には示されていない二次流れベクトルの計測結果、およびHumphreyらと異なる位置での主流方向速度分布を提示している。そこで、平均速度場における解析結果を、Humphreyら、須藤らの実験結果とともに比較検討した。その結果、数値解析は、須藤・板野の測定結果に類似し、二次流れベクトル等を良好に予測した⁽⁴⁾。また、これまで実験的にも、数値的にも報告されていない曲がり入口、出口部近傍における二次流れの第1種から第2種への、あるいは逆の場合の遷移挙動を定量的に示した。これまで多くの乱流モデルと、その乱流モデルを適用した解析例が種々提示されているが、いくつかの複雑な現象が重畳する乱流場での乱流モデルの妥当性、はん用性を検討した例は少なく、この意味より2種類の二次流れが共存する流れを数値予測することは重要な点であると思われる。

さらに、この正方形断面を有する90°曲がり管路に対しては、須藤・高見・板野⁽⁷⁾により、レイノルズ応力場の詳細な計測結果が報告されている。流路形状、実験条件等は須藤・板野⁽⁶⁾のそれと同一である。彼らは、主流方向速度変動、せん断応力を入口直管部、曲がり部、出口直管部の広範にわたり測定している。

そこで、本研究においてはHumphrey-Whitelaw-

* 原稿受付 1994年12月26日。

^{*1} 正員、宇都宮大学工学部(〒321 宇都宮市石井町2753)。^{*2} 宇都宮大学大学院。

Yee⁽⁵⁾, 須藤・高見・板野⁽⁷⁾の示した応力場における測定結果と本解析結果とを比較することにより, 乱流モデル, 解析手法の得失について検討するとともに, 応力場に特徴的な現象についても考察を加えることを目的とする. この種の比較的曲がりのきつい正方形断面管路においては, 内壁側, 外壁側近傍にて主流方向速度変動の特徴的な挙動が報告されている. そこで, この主流方向速度変動に着目し, その生成機構について検討を加える. 乱流モデルとしては, 対流項, 拡散項を代数式にて置き換えた代数レイノルズ応力モデルを用いた. また, この種の複雑形状に対しては, 境界条件の設定が容易な境界適合座標系を導入し解析した.

2. おもな記号

$c_1, c_2, c_1^*, c_1', c_2^*, c_2', \zeta$: 経験定数

D_h : 水力直径

De : デイン数 $= Re\sqrt{D_h/2R_c}$

L : 特性距離

$Pr(\overline{u_\theta^2})$: $\overline{u_\theta^2}$ の生成項

R_c : 曲がり流路中心位置までの半径

r : 流路内の任意な位置までの半径

r_i : 内壁面までの半径

r_o : 外壁面までの半径

Re : レイノルズ数 $= U_b D_h / \nu$

U_{1max} : 流路断面内主流方向最大速度

U_b : 混合平均速度

U_r : 円筒座標上の半径方向時間平均速度

U_θ : 円筒座標上の円周方向時間平均速度

u_r : 円筒座標上の半径方向変動速度

u_θ : 円筒座標上の円周方向変動速度

u_z : 円筒座標上の奥行き方向変動速度

X_i : 直交座標系での*i*方向座標軸

z : 同筒座標上の奥行き方向座標

θ : 曲がり入口からの曲がり角度

ν : 粘性係数

3. 解析手法

3.1 計算対象実験 解析対象としたHumphrey-Whitelaw-Yee⁽⁵⁾の実験装置概略図, ならびに座標系を図1に示す. U_b, U_r は主流方向, 半径方向の速度を示している. 流路断面は, 一辺が4.0 cmの正方形断面であり, 曲がり入口, 出口部にはおのおの水力直径の45, 30倍に当たる正方形断面直管が接続されている. 曲がり半径比は2.3と比較的曲がりのきつい流路を形成している. 実験に際しては, 作動流体に水を用

表1 圧力・ひずみ相関項のモデル化

$\pi_{ij,1} + \pi_{ji,1}$	$-c_1 \frac{\epsilon}{k} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right)$
$\pi_{ij,2} + \pi_{ji,2}$	$-\frac{c_2 + 8}{11} \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij} \right) + \zeta k \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{8c_2 - 2}{11} \left(D_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij} \right)$
$[\pi_{ij} + \pi_{ji}]_w$	$c_1 = c_1^* + c_1' f\left(\frac{L}{X_w}\right), c_2 = c_2^* + c_2' f\left(\frac{L}{X_w}\right),$ $\zeta = \zeta^* + \zeta' f\left(\frac{L}{X_w}\right)$

$$P_{ij} = -\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k}, \quad D_{ij} = -\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_i}$$

$$P_k = -\overline{u_k u_l} \frac{\partial U_k}{\partial x_l}$$

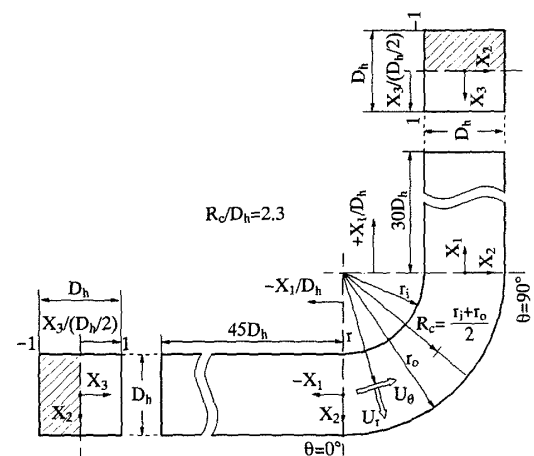


図1 計算対象空間および座標系

い, レーザドップラー流速測定にて直管部, 曲がり部のレイノルズ応力測定を行っている. 代表速度に混合平均速度, 代表寸法に水力直径を用いたレイノルズ数は40 000, デイン数は $De = 26 000$ である. 一方, 須藤・高見・板野⁽⁷⁾の実験は, 曲がり入口, 出口部に $100D_h, 40D_h$ の直管を設け, 曲がり半径比を2.0とし, 熱線流速計にて計測している点が, Humphreyらの実験とは異なる. レイノルズ数はHumphreyらと同じ40 000である.

3.2 レイノルズ応力方程式 非等方性乱流を正確にとらえる意味よりレイノルズ応力輸送方程式を用いるものとした. 本解析においては, 輸送方程式に代数化モデルを適用し解く. すなわち数値計算のうえで障害となるのが対流項, ならびに拡散項である. 従来のモデルでは, これらの項を省略してモデル化を行っているが, ここでは, 対流項, 拡散項の影響を多少とも考慮する意味より, Rodi⁽⁸⁾近似を適用しモデル化を行った.

レイノルズ応力方程式中のモデル化された圧力・ひずみ相関項, 定数系を表1, 2に示す. 表1, 2中, $\pi_{ij,1}$

は、純粋な乱れによる影響を、 $\pi_{ij,2}$ は平均流による影響を、 $\pi_{ij,w}$ は壁面による影響を示している。また $f(L/x_w)$ は、壁の影響を示す関数で壁面近傍にて1、壁から離れるにつれ零に近づく。 x_w は壁面からの垂直距離を示している。この項を含むレイノルズ応力輸送方程式のモデル化に関しては別報⁽⁹⁾にて詳述した。

3.3 境界適合座標 境界適合座標系による計算手法は、物理平面上の解析領域を計算領域へと座標変

換し計算平面上で支配方程式を解く手法である。境界条件の設定、方程式の離散化が容易な反面、変換された支配方程式が複雑になるという特徴をもつ。支配方程式の計算平面上への変換は次の数学定理を用いる。

$$\frac{\partial}{\partial X_i} = \frac{\partial \xi}{\partial X_i} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial X_i} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \zeta}{\partial X_i} \frac{\partial}{\partial \zeta} \quad \dots\dots\dots (1)$$

上式中 ξ, η, ζ は、変換された計算平面での座標軸を示している。上式を用いた各方程式の変換法、変換により導出される輸送方程式、反変速度、計量テンソルなどは別報にて詳述した⁽¹⁰⁾。

数値計算に際しては、系の対称性を考慮し図1の斜線で示す1/2断面にて解析を行った。曲がり部入口、出口部には Humphrey らの実験と同じ助走区間を設けた。図2に計算格子を示す。 X_3 軸方向に21、 X_2 軸方向に41、流れ方向に144の計算格子を配列した。図2中の ξ, η, ζ は計算平面上での座標系を示している。計算レイノルズ数は実験と同じ40000である。その数値解析手法は前報⁽⁴⁾のそれと同一である。

4. 結果と考察

4.1 主流方向速度変動値の比較 図3に Humphrey-Whitelaw-Yee⁽⁵⁾による主流方向速度変動分布と解析結果との比較を、図4に須藤・高見・板野⁽⁷⁾の

表2 圧力・ひずみ相関項の定数系

c_1^*	c_2^*	ζ^*	c_1'	c_2'	ζ'
1.40	0.44	-0.16	-0.35	0.12	-0.10

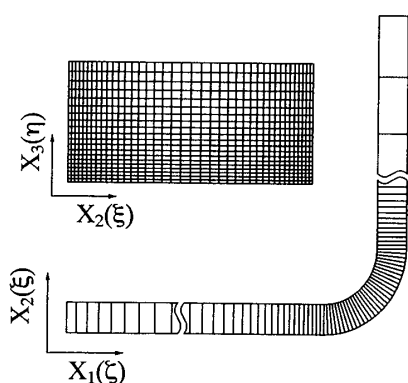


図2 計算格子

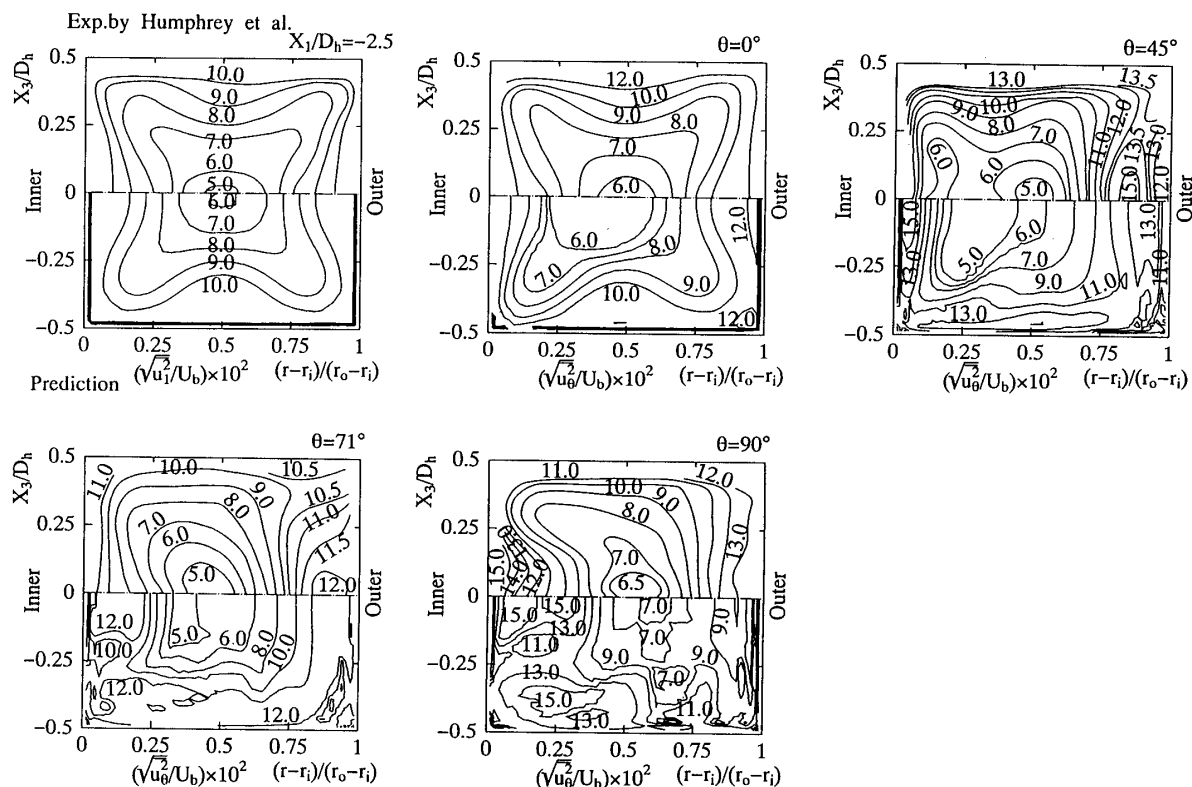


図3 Humphrey らの実験との主流方向速度変動比較

計測結果との比較を示す。各値は、混合平均速度にて無次元化し、計算結果の等値線は、各実験結果に示された等値線の値に準じた。図3、4に示す実験結果より、曲がり角が小さい範囲では外壁側に大きな乱流強度を示す領域が、逆に、曲がり出口部に近づくにつれ内壁側に乱流強度の大きな領域が存在することが認められる。計算結果もこの特徴的な傾向を示す結果になってはいる。しかし、計算結果は、例えば図3の $\theta = 45^\circ$ 、図4の $\theta = 30^\circ$ の結果に見られるように内壁側近傍に乱流強度の小さな領域が存在するものの、壁面ごく近傍においては比較的高い値を示し実験結果と異なる。

以上のような、内壁近傍における乱流強度の変化、あるいは、実験結果との差異要因は以下のように分析される。主流方向変動速度 $\overline{u_\theta^2}$ の生成項を $Pr(\overline{u_\theta^2})$ と

すると、その値は以下のように定義される⁽¹¹⁾。

$$Pr(\overline{u_\theta^2}) = -2\overline{u_\theta u_r} \frac{\partial U_\theta}{\partial r} - 2\overline{u_\theta^2} \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} - 2\overline{u_\theta^2} \frac{U_r}{r} - 2\overline{u_\theta u_z} \frac{\partial U_\theta}{\partial z} \dots\dots\dots (2)$$

上式の各項のうち、内壁および外壁近傍の乱流生成に支配的な項は、右辺第1項、第2項であり、図5に、これらの項を計算結果より算出した結果を示す。結果は、須藤らの実験結果にならない曲がり部 $\theta = 0, 30, 60, 90^\circ$ 断面にて等値線図として示した。右辺第1項は、曲がり全断面にわたり正值を示し、乱流生成には利得を示すことが理解される。これは、 $\partial U_\theta / \partial r$ は内壁側で正の、外壁側で負の値をとるのに対し、せん断応力 $\overline{u_\theta u_r}$ は内壁側で負、外壁側で正の値をとるためと解釈され

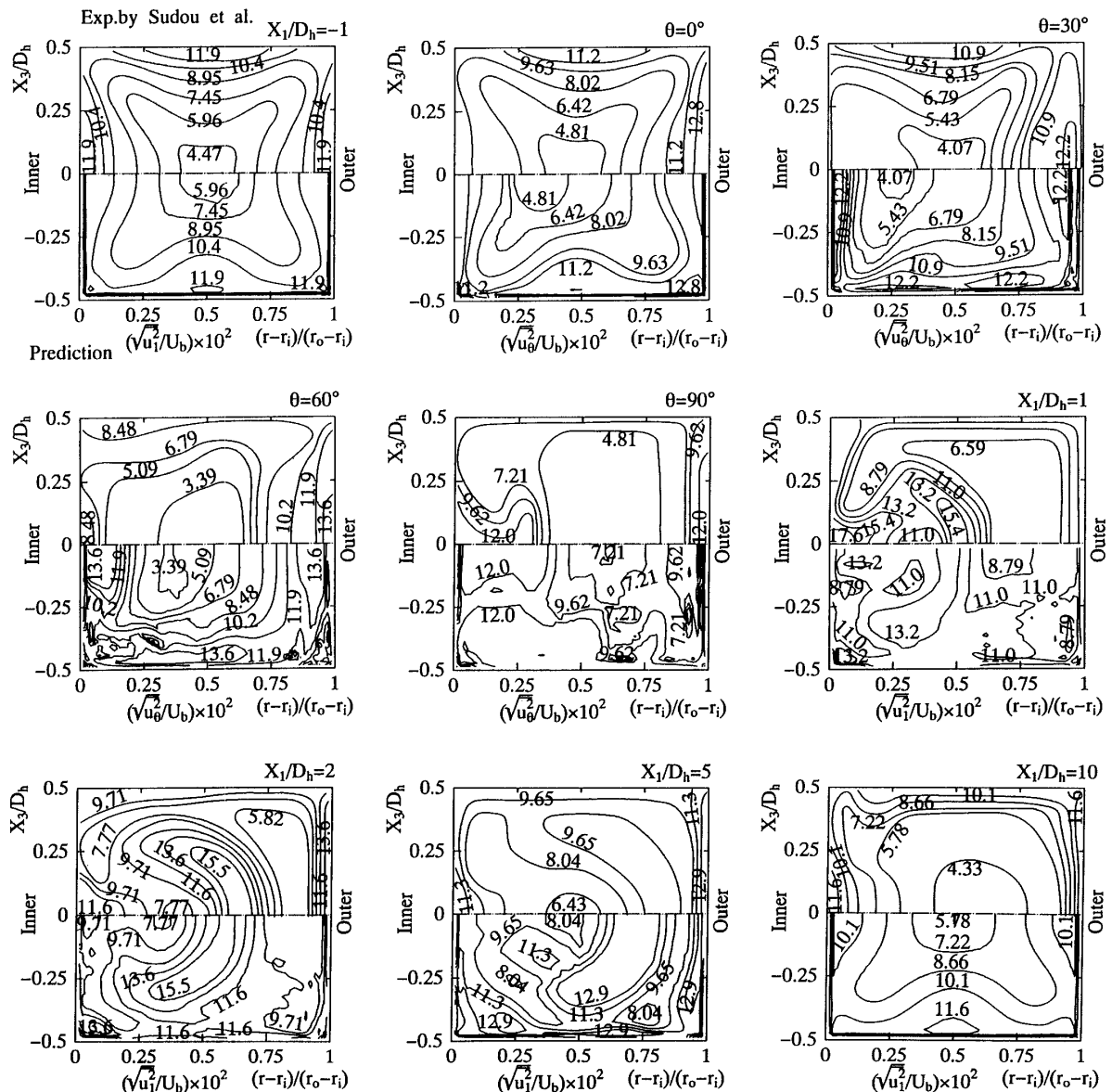


図4 須藤らの実験との主流方向速度変動比較

る。一方、主流方向速度の流れ方向への速度こう配を有する第2項は $\theta = 0^\circ$ 断面の外壁では利得の、内壁においては損失の効果を示し、曲がり管路内の各断面では、外壁側において損失の、内壁側においては利得の効果を示すことが理解できる。以上の結果より、曲がり入口の内壁側乱流強度の減少は、この第2項の生成項が大きく寄与していることを指摘できる。また、この第2項の生成項は、曲がり部内壁側にて利得を示し、かつ曲がり角が大きくなるにつれ、その強度は増大し、90°断面では第1項のそれより大きくなり支配的となる。このことは、90°断面にて、上下対称軸の内壁近傍に低速流が二次流れにより移流される結果 $\partial U_\theta / \partial \theta$ が負の値をもって大きく変化することに起因しているものと解釈される。計算結果において、内壁ごく近傍に高い値の領域が存在するのは、この第2項の生成項に起因しているものと推察される。また、曲がり角が進むにつれ内壁側の乱流強度が徐々に増大するものこの第2項の生成項に起因しているものと考えられる。曲がり管路においては、その二次流れによ

り、主流方向速度が移流される結果、流れ方向での減速加速領域が生じ、この第2項の生成項が支配的なものと思われる。

また、第3、4項の生成項の計算結果を図6に示す。 $\theta = 0, 30, 60, 90^\circ$ 断面における等値線分布を示した。図6より理解されるように右辺第3項は、水平壁面近傍にて大きな値を示し、水平壁面近傍における乱流生成に大きく寄与することが推察できる。さらに、第4項の生成項は、曲がり角60°からは水平壁面近傍、および内壁側上下対称軸近傍にて正值を示し、水平壁面、内壁面の中央部の乱流生成に寄与することを示している。曲がり角が進むにつれ内壁側近傍での乱流生成の増大が、第2項に起因することを前述したが、曲がり角途中からは、この第4項による影響も少くないことを計算結果は示唆している。特に曲がり出口部の内壁近傍においては、大きな値を示しこの項が無視できないことが理解できる。

図3、4より曲がり入口にてHumphreyらの実験では上壁に12.0の等値線が認められるが、須藤らの実

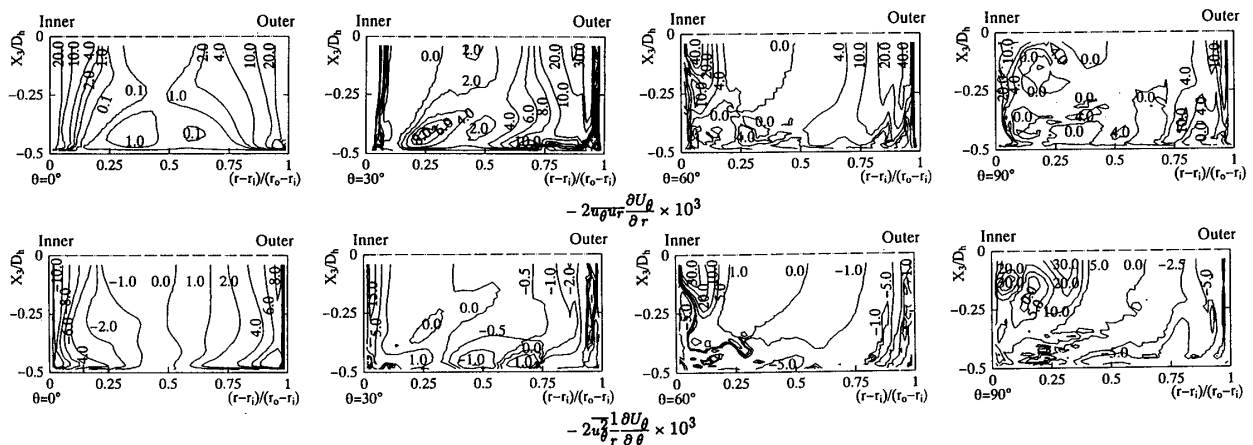


図5 第1, 2項の生成項等値線図

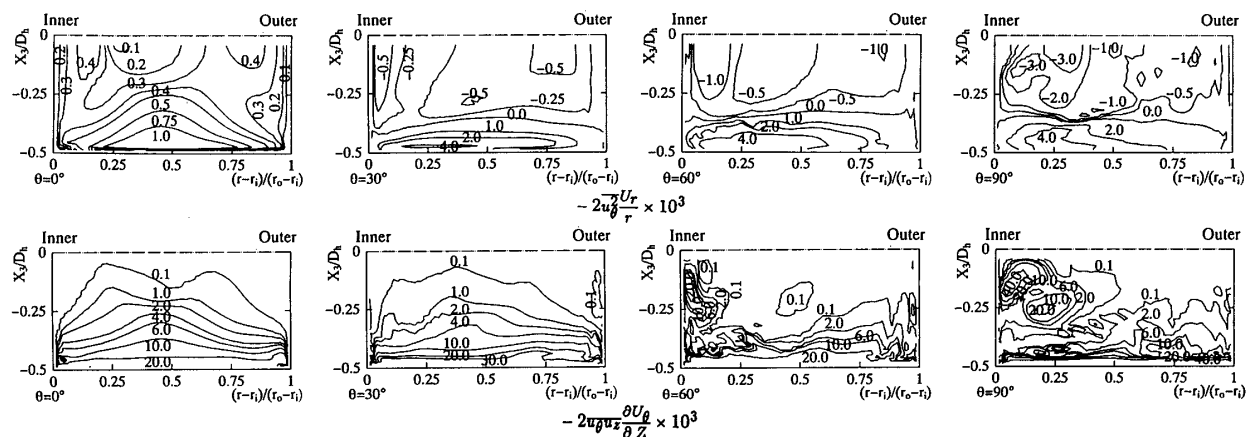


図6 第3, 4項の生成項等値線図

験では認められない。また、須藤らの実験結果には管中心部に4.81の等値線が認められるが、Humphreyらの実験においては認められない。計算では、4.81, 11.2の等値線を予測しており須藤らに近い分布を示した。また、 $\theta = 45^\circ$ 断面のHumphreyらの実験結果では、外壁面よりいくぶん離れた位置で大きな値を示しているが、計算値は外壁面近傍に存在し、曲がり角度は異なるが須藤らの $\theta = 30^\circ$ の実験結果と符合している。また、須藤らの $\theta = 90^\circ$ 断面の内壁にて12.0の等値線が内壁より管中心部に張り出す分布を示しているが、計算でも領域の大きさは異なるものの同様な傾向を示している。これらの点から、計算結果はHumphreyらの結果より須藤らの結果に比較的近い分布を示している。これは、平均速度場の比較結果と同様で

ある⁽⁴⁾。しかし、両者の等値線を子細に検討すれば、須藤らの結果を完全に予測しているわけではなく、例えば $\theta = 90^\circ$ 断面において、内壁側に大きな乱流強度を示す領域が存在することを予測するものの、実験等値線を良好に予測しているとはいえない。数値解析の立場から、こうした差異要因の一つとして、レイノルズ輸送方程式の対流項、拡散項を代数式にて置き換えた点を指摘できる。

4.2 セン断応力分布の比較 図7にせん断応力 $\overline{u_\theta u_r}$ に関する須藤・高見・板野⁽⁷⁾の実験結果と計算結果との比較を示す。 $X_1 = -1.0D_h$ にて実験結果は、左右対称形の等値線分布を示しているが、計算結果では、その等値線分布の対称性は崩れ始め、曲がりの影響が現れる結果となっている。曲がり管路内における特徴

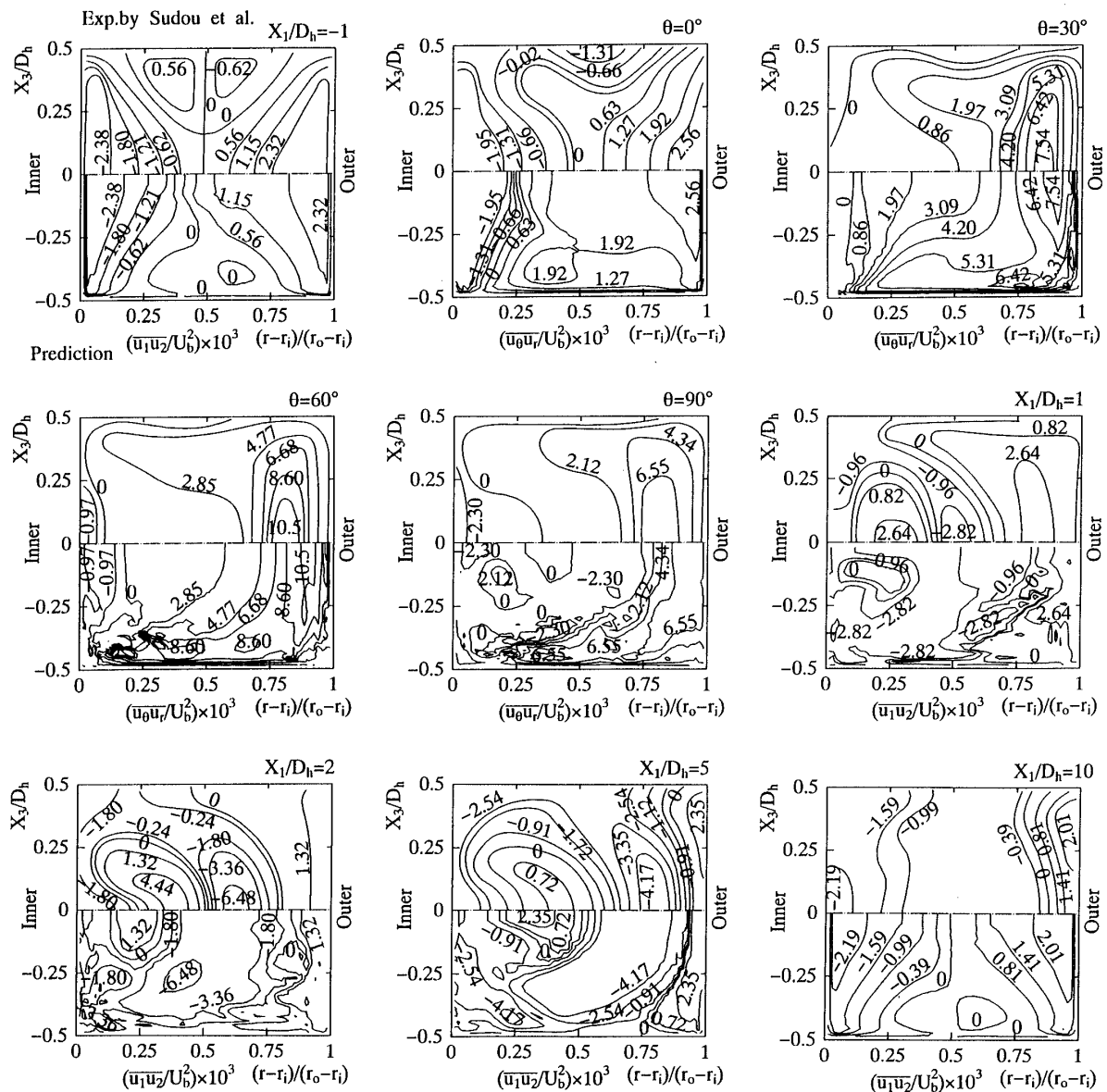


図7 須藤らの実験との $\overline{u_\theta u_r}$ 比較

的な分布とし、実験結果より以下のような点が指摘できる。すなわち、曲がり入口部においては、その等値線は大きく変化して、零ラインの等値線は内壁側に押しやられる。さらに曲がり角が進むと、その零ラインは、内壁近傍にまで延びて、断面全体にわたって正值の領域が支配的となる。同時に外壁近傍にて比較的大きな強度を有するせん断応力が存在する。これらの傾向は $\theta = 30, 60^\circ$ 断面にて顕著である。さらに曲がり出口部 $\theta = 90^\circ$ 断面においては、二次流れによる移流効果と思われるが、零ラインは上下対称軸に沿って、管路中心部方向へ押しやられる分布を示す。これに対し計算結果も、これらの特徴的な現象を捕捉する結果を示している。

さらに下流の出口直管部において、せん断応力は、

さらに複雑な様相を呈する。すなわち実験結果の $X_1 = 1.0, 2.0, 5.0D_h$ 断面において、外壁近傍より内壁に向かって正、負、そして上下対称軸に沿う $(r-r_i)/(r_o-r_i) = 0.25$ 近傍に正の領域が存在する複雑な分布が認められる。一方、計算結果は零ラインの位置に相違は認められるものの、本提示の乱流モデルにおいても同様な傾向を示す結果となっている。また、 $X_1 = 10D_h$ 断面にて、計算結果は、左右対称形の等値線分布を示し流れが完全発達乱流のそれに近い分布を示しているが、実験においてその傾向は認められない。

図8は、せん断応力 $\overline{u_\theta u_z}$ の実験結果、計算結果を比較したものである。上下対称軸を挟んで両結果を比較しているため、計算結果は、実験結果等値線の符号とは逆の符号をもつ。正方形断面を有する直線管路に

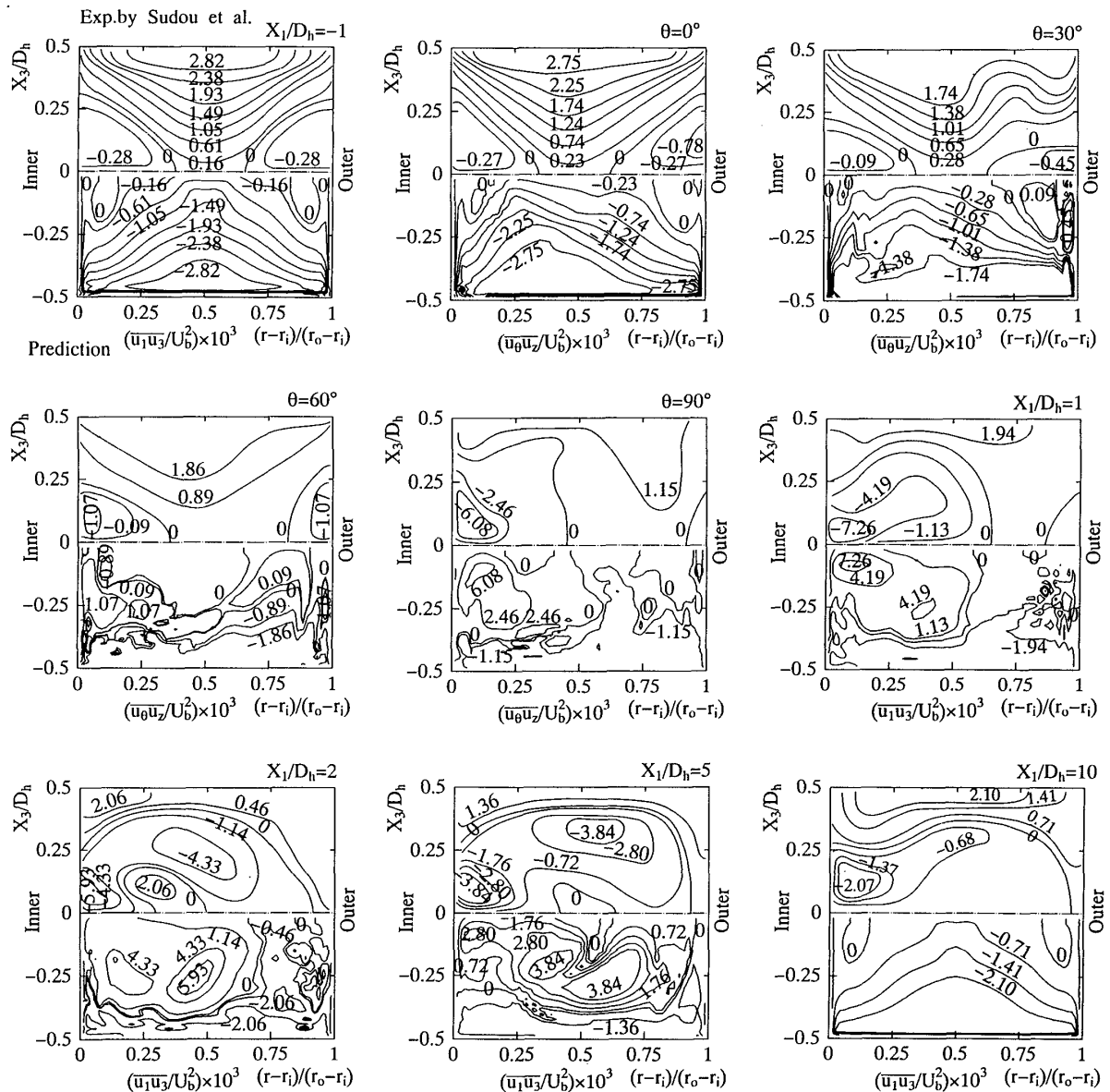


図8 須藤らの実験との $\overline{u_\theta u_z}$ 比較

において、このせん断応力 $\overline{u_{\theta}u_z}$ と $\overline{u_{\theta}u_r}$ とは、異符号領域をもつなど等値線分布は類似の分布を示すが、曲がり管路に流入するとその分布は大きく異なる。 $\theta = 0^\circ$ 断面における $\overline{u_{\theta}u_r}$ 分布と比較すると、 $\overline{u_{\theta}u_z}$ は比較的緩慢にしか変化しないことが両結果よりわかる。曲がり部において、計算結果の等値線は実験結果ほど滑らかな等値線を描いてはいないが、その絶対値は予測している。また、特徴的な点として、曲がり角 $\theta = 60^\circ$ までは、その絶対値の最大値は、水平壁面近傍に存在しているが、曲がり出口部の $\theta = 90^\circ$ 断面に至ると、その絶対値の最大値は内壁側上下対称軸近傍に現れることが、両結果より理解できる。このような傾向は、先のせん断応力 $\overline{u_{\theta}u_r}$ には認められない現象であり、 $\overline{u_{\theta}u_z}$ 分布を特徴づける現象と解釈される。曲がり管路においては、曲がり入口にて $\overline{u_{\theta}u_r}$ 分布は大きく変化し、逆に曲がり出口部において $\overline{u_{\theta}u_z}$ 分布は大きく変化するとともにいえる。

曲がり出口直管部に流入すると、 $X_1 = 1.0, 2.0, 5.0D_h$ 断面の内壁側上下対称軸近傍にて、絶対値の最大値が両結果より認められるが、 $X_1 = 10D_h$ まで発達すると水平壁面近傍に絶対値の最大値が存在することが両結果より理解できる。ただし、計算結果は、その等値線分布から流れが完全発達状態に近いことを示唆する結果となっている。

5. 結 論

正方形断面を有する90°曲がり流路を対象に、代数レイノルズ応力モデル、境界適合座標系を用いて三次元乱流場の数値解析を行った。解析結果は、実験に示されたレイノルズ応力と比較し、その差異分析、応力分布の発達動挙動を考察するとともに、一部その生成機構について検討し以下の結論を得た。

(1) 本解析結果は、Humphrey-Whitelaw-Yee⁽⁵⁾ による測定結果より、須藤・高見・板野⁽⁷⁾ の計測した応力分布に近い値を示した。

(2) 主流方向速度変動は、曲がり角の小さい領域では、内壁近傍側で小さな乱流強度を、外壁近傍にて大きな乱流強度を示すが、曲がり角が進むにつれ、こ

の傾向は逆転する。この特徴的な現象を本解析手法は比較的良好に予測した。

(3) 内壁、外壁近傍における乱流生成に大きく寄与する生成項は、 $\partial U_\theta/\partial r$, $\partial U_\theta/\partial \theta$ の項を含む項であり、特に $\partial U_\theta/\partial \theta$ を含む生成項は、先の曲がり角が進むにつれ、乱流強度の最大値が逆転する現象を大きく支配する項である。同時に、 $\partial U_\theta/\partial z$ を含む生成項も曲がり出口近傍においては、内壁側の乱流生成に大きく寄与する。

(4) せん断応力 $\overline{u_{\theta}u_r}$ は、曲がり入口部において、せん断応力 $\overline{u_{\theta}u_z}$ は、曲がり出口部において大きな変化を示し、この種の流れを特徴づけているが、本解析結果もこの傾向を捕捉している。

(5) $X_1 = 10D_h$ 断面の応力分布より、実験結果は流れの回復が遅いが、計算結果は、逆に回復が早いことを示唆する結果を示した。

(6) 代数応力モデルと、境界適合座標系とを導入した、本解析手法により、レイノルズ応力場を比較的良好に予測することが可能であり、本解析手法、および乱流モデルの妥当性、はん用性を示した。

本研究を行うのに際し、本学4年生の村上泰隆氏の協力を得た。ここに記して謝意を表する。

文 献

- (1) Eskinazi, S. and Yeh H., *J. Aeronaut. Sci.*, **23** (1956), 23-75.
- (2) Cheng, K. C. and Akiyama, M., *Int. J. Heat Mass Transf.*, **13**-3 (1970), 471-490.
- (3) Kim, W. J. and Patel, V. C., *Trans ASME, J. Fluids Eng.*, **116** (1994), 45-52.
- (4) 杉山・秋山・藤田・佐藤, 機論, **61**-587, B(1995), 2393-2400.
- (5) Humphrey, J. A. C., Whitelaw, J. H. and Yee, G., *J. Fluid Mech.*, **103** (1981), 443-463.
- (6) 須藤・板野, 機論, **54**-502, B(1988), 1319-1324.
- (7) 須藤・高見・板野, 機論, **55**-515, B(1989), 1861-1867.
- (8) Rodi, W., *Z. Angew. Math. Mech.*, **56** (1976), 219-221.
- (9) 杉山・秋山・芹沢, 機論, **56**-531, B (1990), 3328-3335.
- (10) 杉山・秋山・平田・上野, 機論, **57**-539, B (1991), 2269-2276.
- (11) Chang, S. M., Humphrey, J. A. C. and Modavi A., *Phys Chem. Hydrodyn.*, **3** (1983), 243-269.