

短い入口助走管路を有する曲がり管路内の乱流構造解析*

(流入境界層の曲がり管路内流動への影響)

杉 山 均^{*1}, 秋 山 光 庸^{*1}
村 上 泰 隆^{*2}, 藤 田 修^{*2}

Numerical Analysis of Turbulent Structure in a Square-Sectioned Bend with Short Inlet Length Duct

(Influence of Boundary Layer Thickness at Bend Entry on Developing Flow in a Square-Sectioned Bend)

Hitoshi SUGIYAMA, Mitsunobu AKIYAMA,
Yasutaka MURAKAMI and Osamu FUJITA

A numerical analysis has been performed on developing turbulent flow in a square-sectioned 180 deg bend. The ratio of bend mean radius of curvature to hydraulic diameter is 3.375 and a straight duct 6 hydraulic diameters long is attached to the inlet plane of the bend. In calculation, an algebraic stress model was adopted in order to predict Reynolds stresses precisely, and a boundary-fitted coordinate system was introduced as the method of coordinate transformation. Calculated results were compared with the experimental data available. Moreover, the influence of boundary layer thickness at the bend entry is examined using the calculated results. As a result of this study, we conclude that the present method can predict well the mean flow velocity as well as its a minimum and the measured spike velocity in streamwise velocity fluctuations near the symmetry at 90 deg. Furthermore the calculated results confirm that thinner entry boundary layers in the turbulent flow give rise to lower cross stream velocity. As a characteristic feature, it is pointed out that the secondary flow breaks down into several eddies in the place of the classical single vortex structure when the boundary layers are thin. Therefore, distorted contour lines of streamwise flow appear at angles greater than 90 deg where the secondary flow begins to break down.

Key Words: Numerical Analysis, Secondary Flow, Turbulent Flow, Square-Sectioned 180 Deg Bend, Reynolds Stress Model, Boundary-Fitted Coordinate System

1. 緒 言

二次流れを伴う曲がり管路は、いくつかの興味ある現象を内包することより多くの研究が報告されている。この二次流れは、層流場より乱流場において複雑な様相を呈し、圧力こう配により生成される第1種二次流れと、乱れの非等方性により生成される第2種二次流れとが混在する流れを形成する。非円形断面形状を有し、曲がり部入口、および出口部に助走区間路を有する曲がり管路は、こうした2種類の二次流れが複雑に共存する代表的な流れ場と考えられる。

Humphrey-Whitelaw-Yee⁽¹⁾は、曲がり半径比2.3(水力直径に対する曲がり流路中心までの半径比)の比較的曲がりのきつい正方形断面90°曲がり管路を対象に、レーザドップラー流速計による乱流測定を行っている。須藤・板野⁽²⁾は彼らの実験を対象に曲がり

半径比2.0, 同一レイノルズ数に対し測定を行い、Humphreyら⁽¹⁾の結果には示されていない二次流れベクトルの計測結果を提示している。さらに須藤・高見・板野⁽³⁾は、レイノルズ応力場の結果を詳細に報告している。これら90°曲がり管路に対しChang-Humphrey-Modavi⁽⁴⁾は、180°曲がり管路を対象に曲がり入口、出口部に水力直径の31倍の直管を設け実験を行っている。その結果、曲がり角90°での主流方向速度が大きく減少する領域が存在すること、同一位置にて主流方向変動速度は逆に増加することを報告している。

一方、数値解析に関し、いくつかの結果が報告されている。特にChoi-Iacovides-Lauder⁽⁵⁾は、渦動粘性の概念を導入した $k-\epsilon$ 二方程式モデル、代数応力モデルを用い、Chang-Humphrey-Modavi⁽⁴⁾の指摘した曲がり角90°における主流方向速度の減少、主流方向速度変動の増加を予測した。その結果、代数応力モデルのほうが勝るものの実験との一致は不十分であることを示している。以上のように実験、計算とも二次流れに関しては、第1種二次流れ挙動に関する報告がお

* 原稿受付 1995年5月11日。

^{*1} 正員、宇都宮大学工学部 (〒321 宇都宮市石井町2753)。

^{*2} 宇都宮大学大学院。

もであり、共存する二次流れ遷移に関する報告は見あたらない。そこで著者ら⁽⁶⁾はChang-Humphrey-Modavi⁽⁴⁾の実験を対象に、その流動挙動を予測するとともに共存する二次流れの遷移挙動の予測を行い新たな知見を提示した。

さらにこの種の流れに研究のうえからも興味があり、工学的にも重要な問題として、曲がり部流入境界層の相違による流れ場への影響に関する問題が指摘される。この研究に関し、Taylor-Whitelaw-Yianneskis⁽⁷⁾は、曲がり入口部に水力直径の7.5倍の助走区間を設けた90°曲がり管を対象に測定を行い、二次流れ強度が曲がり入口における境界層厚さに依存することを報告している。またIacovides-Launder-Loizou-Zhao⁽⁸⁾は、Changら⁽⁴⁾とほぼ同一条件とし、曲がり入口に水力直径の6倍の直管を設けた場合の計測、および代数応力モデルを用いた数値解析を報告している。しかし流入境界層の曲がり管路内流動への影響について定量的に示した報告は少ないようである。

そこで、本研究では、Iacovides-Launder-Loizou-Zhao⁽⁸⁾の実験を対象に数値解析を行いその結果と、完全発達流が曲がり部に流入した場合の結果とを比較しながら流入境界層の曲がり管路内流動への影響について新たな知見を得るとともに、Iacovidesらの実験結果との比較を通し解析手法の有用性について検討することを目的とする。その際、完全発達流が流入した場合の結果は、Changら⁽⁴⁾の実験を対象として数値解析を行った著者ら⁽⁶⁾の計算データベースを用いるものとする。乱流モデルとしては、代数応力モデルを用いて解析する。本代数応力モデルは、レイノルズ応力輸送方程式中の圧力・ひずみ相関項に改良を加えたモデル⁽⁹⁾であり、Choi-Iacovides-Launder⁽⁵⁾の使用したモデルとは異なる。また、境界条件の設定が容易な境界適合座標系を導入し解析を行う。

2. おもな記号

D_h : 水力直径

De : デーン数 $Re\sqrt{D_h/2R_c}$

k : 乱流エネルギー

R_c : 曲がり流路中心位置までの半径

r : 流路内の任意な位置までの半径

r_i : 内壁面までの半径

r_o : 外壁面までの半径

Re : レイノルズ数 $= U_b D_h / \nu$

U_i : 直交座標系での i 方向速度成分

u_i : 直交座標系での i 方向変動速度成分

U_b : 混合平均速度

U_r : 円筒座標上の半径方向時間平均速度

U_θ : 円筒座標上の円周方向時間平均速度

u_r : 円筒座標上の半径方向変動速度

u_θ : 円筒座標上の円周方向変動速度

u_z : 円筒座標上の深さ方向変動速度

X_i : 直交座標系での i 方向座標軸

z : 円筒座標上での深さ方向座標軸

θ : 曲がり入口からの曲がり角

ε : 乱流散逸

ν : 粘性係数

ρ : 密度

3. 解析方法

3.1 計算対象実験 解析対象としたIacovides-Launder-Loizou-Zhao⁽⁸⁾の実験装置の概略図、座標系を図1に示す。 U_r , U_θ は円筒座標上の曲がり部の速度を、 U_i は直交座標系での X_i 座標軸方向の速度を示す。流路断面は、一辺が9 cmの正方形断面で、曲がり入口、出口部には、それぞれ水力直径の6, 31倍の直管が接続され、曲がり半径比は3.375と曲がりのきつい流路を形成している。実験に際しては、熱線流速計を用い時間平均速度、ならびに乱流特性量の測定を、流入直管路、曲がり部にて行っている。混合平均速度、水力直径を用いたレイノルズ数は58 000であり、デーン数は $De=22\,300$ である。

3.2 レイノルズ応力方程式 レイノルズ応力方程式の厳密式は次式にて示される。

$$\begin{aligned} \frac{Du_i u_j}{Dt} = & - \left(u_i u_k \frac{\partial U_j}{\partial X_k} + u_j u_k \frac{\partial U_i}{\partial X_k} \right) \\ & + \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) - \frac{\partial}{\partial X_k} \left\{ u_i u_j u_k - \nu \frac{\partial u_i u_j}{\partial X_k} \right. \\ & \left. + \frac{p}{\rho} (\delta_{jk} u_i + \delta_{ik} u_j) \right\} - 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \frac{\partial u_j}{\partial X_k} \quad \cdots (1) \end{aligned}$$

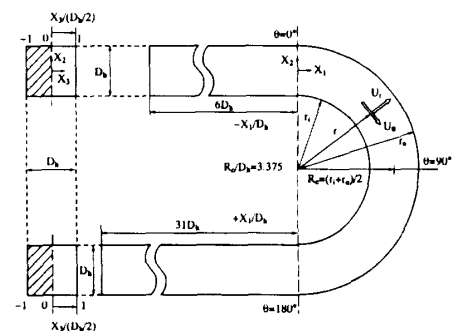


Fig. 1 The test section and definition of coordinate system

上式を直接的に解くことは不可能であり、何らかのモデル化が必要となる。数値計算のうえで、特に障害となるのが左辺の対流項、ならびに右辺第3項の拡散項である。従来のモデルでは、これらの項を省略してモデル化を行っているが、対流項、拡散項の影響を多少とも考慮する意味より、Rodi⁽¹⁰⁾ 近似を用いてモデル化を行った。この Rodi 近似を用いることにより計算の簡便性、経済性が得られる反面、代数応力モデルとなり、近接空間での物理量の相互依存性が薄れる作用があるという問題を内包するの事実である。

レイノルズ応力方程式中の圧力・ひずみ相関項、ならびに定数系、散逸項に関しては別報⁽⁹⁾ にて詳述した。

3・3 境界適合座標 境界適合座標系による計算手法は、物理平面上の解析領域を計算領域へと座標変換し計算平面上で支配方程式を解く手法であり、境界条件の設定、方程式の離散化が容易な反面、変換された支配方程式が複雑になるという特徴をもつ。支配方程式の計算平面上への変換は次の数学定理より変換される。

$$\frac{\partial}{\partial X_i} = \frac{\partial \xi}{\partial X_i} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial X_i} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \zeta}{\partial X_i} \frac{\partial}{\partial \zeta} \dots\dots\dots (2)$$

上式中 ξ, η, ζ は、変換された計算平面での座標軸であり図1の座標系にて定義される。上式を用いた各方程式の変換法、変換により導出される輸送方程式、反変速度、計量テンソルなどは別報にて詳述した⁽¹¹⁾。

計算に際しては、図1の斜線で示す1/2断面にて解析を行った。実験に即し計算においても同一長さの助走区間を設け三次元流路として計算を行った。計算レイノルズ数は、実験を踏襲し58000とした。図2に、計算格子を示す。X₃軸方向に21、X₂軸方向に41、流れ方向に126の計算格子を配列した。乱流エネルギー k 、および乱流散逸 ε の境界条件には、壁関数を用い k, ε の入口条件は、実験にても不明であるため $k = U_b \times 10^{-5}$ 、 $\varepsilon = k^{3/2}/D_h$ と小さな値を設定し解析を行った。式の離散化は、有限差分近似により行い計算諸量の格子点配置は、Regular Grid 法によった。支配方程式の対流項差分近似は QUICK (三次精度の風上差分)

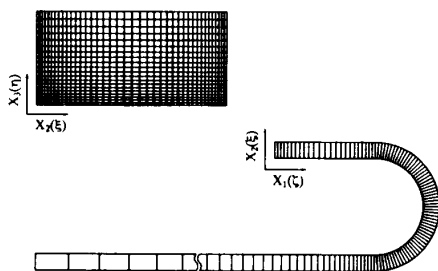


Fig. 2 Computational mesh

を使用した。また、数値解析に際しては支配方程式を三次元だ円形方程式として扱い解析を行っている。

4. 結果と考察

4・1 平均速度場の比較 図3は、曲がり入口上流に相当する $X_1 = -3.0D_h$ における主流方向速度を比較した結果である。各値は混合平均速度にて無次元化してある。助走区間路が短いため境界層厚さが薄いことが理解できる。計算結果は比較的良好に実験値を予測しており、曲がり部への流入条件として妥当な分布であることを示唆している。

図4は、曲がり角 $\theta = 45^\circ$ での円周方向速度、ならびに半径方向速度を両結果にて比較したものである。

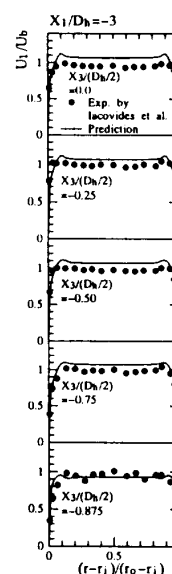


Fig. 3 Comparison of streamwise mean velocity at $X_1 = -3.0D_h$

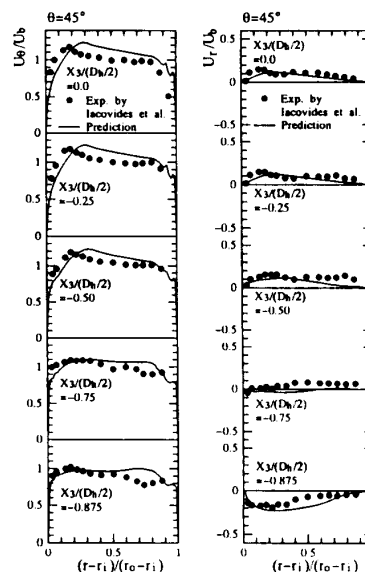


Fig. 4 Comparison of mean velocity at $\theta = 45^\circ$

当該断面における流れ場全体の様相を把握するため、図5に、円周方向速度等値線、第1種二次流れベクトルを示す。最大円周方向速度は内壁側に位置することが両結果より理解できる。これは、二次流れベクトル図より明らかなように上下対称軸上における二次流れ強度が弱いことに起因しているものと考えられる。また、この二次流れ成分の半径方向速度に関しても計算結果は比較的良好に実験値を予測している。

図6は、曲がり角 $\theta=90^\circ$ での円周、半径方向速度を比較した結果である。当該断面の円周方向速度、二次流れベクトルを図7に示す。 $X_3/(D_h/2)=0.0\sim-0.5$ における円周方向速度の $(r-r_i)/(r_o-r_i)=0.2$ 近傍にて、速度は大きく減衰し極小値をとることを両結果より特徴的な現象として指摘できる。これは図7に示す二次流れベクトル図より底壁面、内側壁に沿った二次流れが上下対称軸に向かって大きな一つの渦を形成

していることより理解できる。すなわち壁面に沿う比較的低速の流体が二次流れにより移流された結果と解釈される。この現象は完全発達流が流入した場合のChangら⁽⁴⁾の実験と同様な結果を示している。したがって、この現象は入口境界層に起因するものでなくむしろ曲率半径等の形状的な要因によるものと思われる。計算結果は比較的良好に円周、半径方向速度分布を予測している。

図8は、曲がり角 $\theta=135^\circ$ における円周方向速度、半径方向速度を比較した結果である。図9に当該断面における主流方向速度、二次流れベクトルを示す。円周方向速度分布の比較図より、この位置においても円周方向速度の減衰が両結果より認められる。一方、半径方向速度分布を比較すると、計算と実験において差が認められる。このとき、計算結果の二次流れベクトルに注目すると二次流れは、いくつかの渦に分裂した

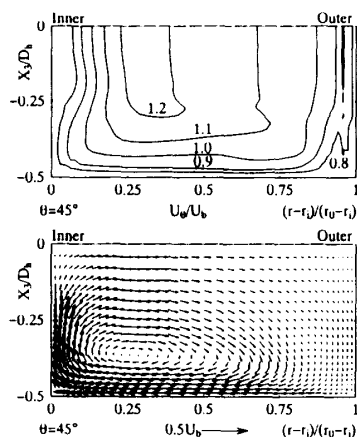


Fig. 5 Calculated results of streamwise mean velocity and secondary flow at $\theta=45^\circ$

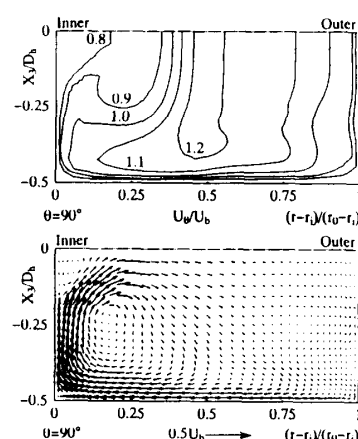


Fig. 7 Calculated results of streamwise mean velocity and secondary flow at $\theta=90^\circ$

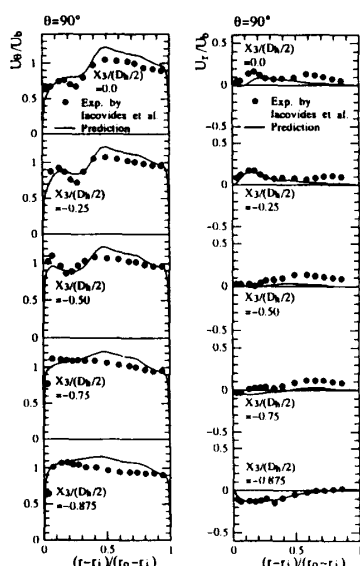


Fig. 6 Comparison of mean velocity at $\theta=90^\circ$

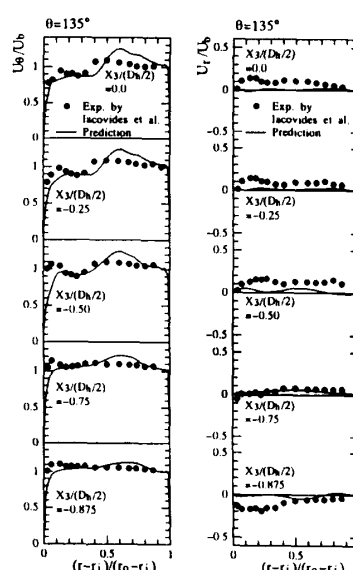


Fig. 8 Comparison of mean velocity at $\theta=135^\circ$

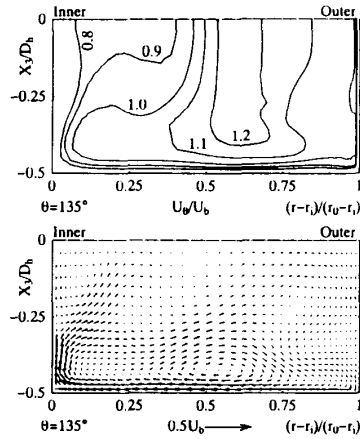


Fig. 9 Calculated results of streamwise mean velocity and secondary flow at $\theta=135^\circ$

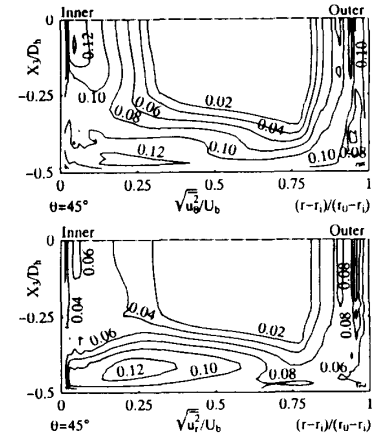


Fig. 11 Calculated results of turbulence intensity at $\theta=45^\circ$

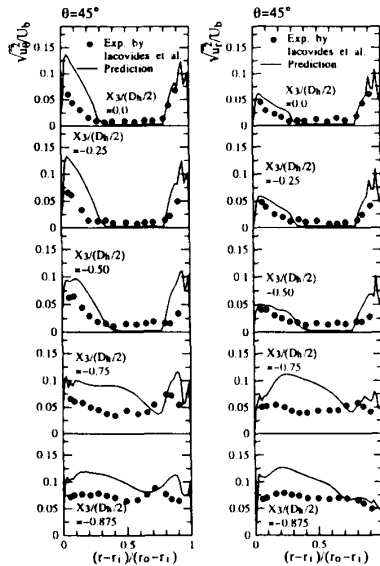


Fig. 10 Comparison of turbulence intensity at $\theta=45^\circ$

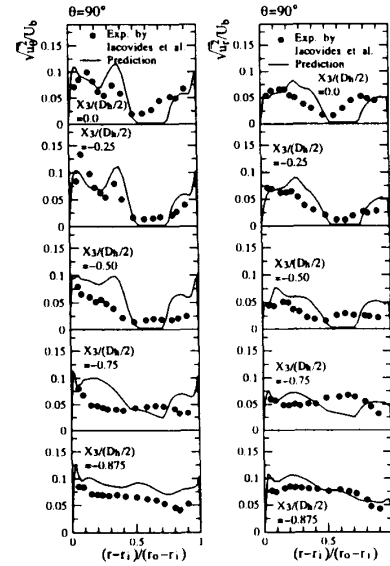


Fig. 12 Comparison of turbulence intensity at $\theta=90^\circ$

カオスの挙動を示していることがわかる。Iacovides らも、彼らの計算結果において曲がり角 $\theta=90^\circ$ 以降において二次流れはいくつかの渦に分裂することを報告しており、本計算結果と符合する結果となっている。また、彼らの計算結果においても半径方向速度分布に関し実験値との一致は、本解析同様良好とはいえない。

4.2 変動速度場の比較 図 10 は、 $\theta=45^\circ$ における円周方向、半径方向変動速度を比較したものである。両結果とも混合平均速度にて無次元化してある。また、各変動速度場の全体挙動を掌握するため計算結果の等値線分布を図 11 に示す。円周方向変動速度に関し、計算は上下対称軸上内壁側にて大きな値を示し実験結果との差異として指摘できる。一般に、曲がり角を有する二次元乱流場において、レイノルズ応力値は、

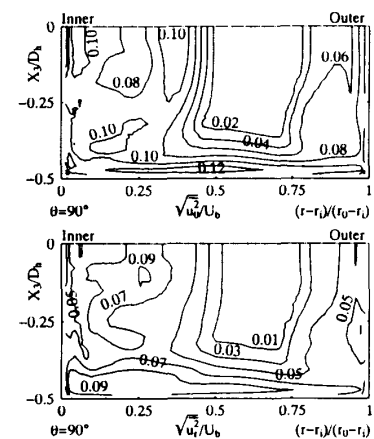


Fig. 13 Calculated results of turbulence intensity at $\theta=90^\circ$

外壁近傍にて高く、内壁近傍にて減少することが報告されているが⁽¹²⁾、計算は異なる傾向を示す結果となった。いま、 $\overline{u_\theta^2}$ の生成項を $Pr(\overline{u_\theta^2})$ とすると生成項は次式のように示される。

$$Pr(\overline{u_\theta^2}) = -2u_\theta u_r \frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{2\overline{u_\theta^2}}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} - \frac{2\overline{u_\theta^2} U_r}{r} - 2\overline{u_\theta u_z} \frac{\partial U_\theta}{\partial z} \dots\dots\dots (3)$$

本解析のような流入境界層が薄い場合に、比較的大きな値を示すのは右辺第1、第2項であり、曲がり角 $\theta=45^\circ$ においては、遠心力による二次流れ強度は大きく、この二次流れにより速度の遅い流体が内壁側の上下対称軸近傍に移流される。この結果 $\partial U_\theta / \partial \theta$ が負符号をもって、その生成に利得として寄与することより、内壁側においても比較的大きな生成を示すものと

推察される。一方、計算結果より半径方向変動速度は、内壁側の底壁面近傍にて大きな値をもつことがわかるが、実験結果はその傾向は類似するものの値は小さい。また、内壁側の底壁面近傍に位置するのは二次流れによるものと解釈される。

図12は、曲がり角 $\theta=90^\circ$ における円周方向変動速

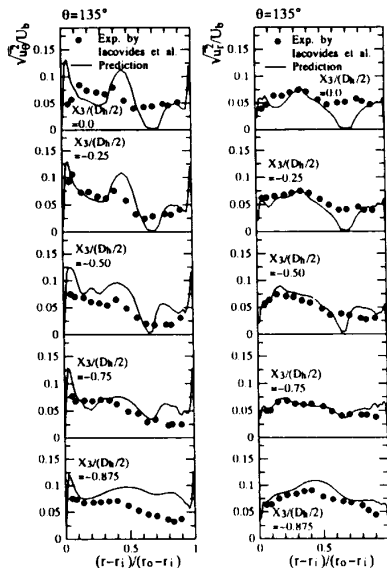


Fig. 14 Comparison of turbulence intensity at $\theta=135^\circ$

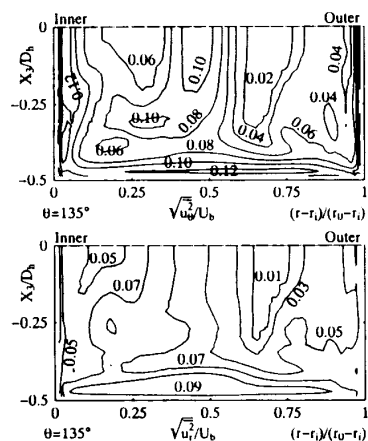


Fig. 15 Calculated results of turbulence intensity at $\theta=135^\circ$

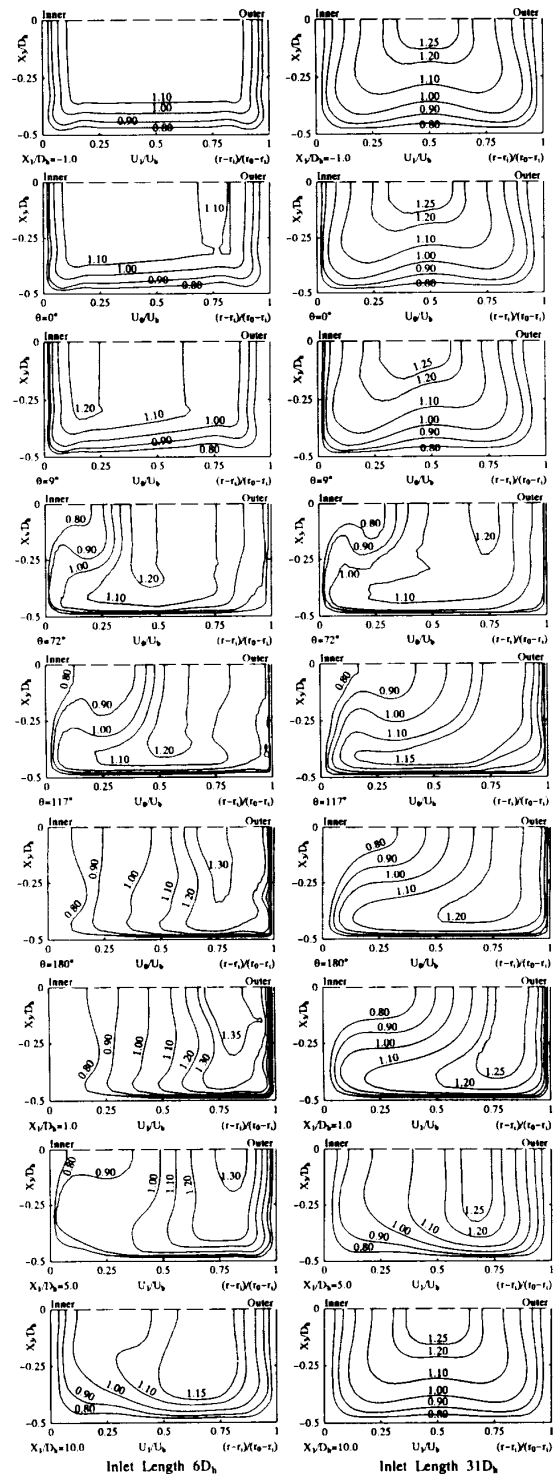


Fig. 16 The difference of streamwise mean velocity between $6D_h$ and $31D_h$ inlet lengths

度、半径方向変動速度の両結果を比較したものである。図13に各変動値の等値線を示す。円周方向変動速度が上下対称軸、 $(r-r_i)/(r_o-r_i)=0.4$ 近傍にて大きく増加し極大値をとることを特徴的な現象として指摘できる。一方、半径方向速度変動は、この位置では単調減少を示しており、完全発達流を流入させた Chang ら⁽⁴⁾の半径方向速度変動分布とは異なる結果を示した。計算結果は、実験値とはその値に関し多少差はあるものの、これらの傾向を比較的良好に予測している。

図14は、曲がり角 $\theta=135^\circ$ での円周方向、半径方向変動速度の両結果を比較したものである。各変動値等値線を図15に示す。上下対称軸上の $(r-r_i)/(r_o-r_i)=0.4$ 近傍に認められた円周方向変動速度の極大値は、この曲がり角位置においても認められる。計算値の半径方向速度変動値は上下対称軸、あるいは $X_3/(D_h/2)=-0.25$ の $(r-r_i)/(r_o-r_i)=0.7$ 近傍にて極小値をとる分布を示し、実験値と異なる分布を示しているが、この点を除けば比較的实验値を捕そくしている。

4.3 流入境界層の違いによる流動変化 以上に示した Iacovides らの実験を対象とした計算結果、および曲がり入口に完全発達乱流を流入させ実験を行った Chang らの実験を対象とした計算結果⁽⁶⁾を比較することより流入境界層の相違による流れ場の変化について検討を加える。前者の場合、入口助走区間長さは $6D_h$ 、レイノルズ数は 58 000 であるのに対し、後者の場合はそれぞれ $31D_h$ 、56 700 である。

図16は、円周方向速度等値線を代表的な位置において比較した結果である。左側は入口助走区間長さが $6D_h$ 、右側は $31D_h$ の結果である。 $X_1/D_h=-1.0$ の位置において、いずれの結果にも第2種二次流れによる等値線の湾曲が認められる。 $\theta=0\sim 72^\circ$ までの等値線分布に着目すると上下対称軸の内壁面近傍にて低速流が、二次流れにより移流されることは共通しているが、断面内最大円周方向速度の移動が境界層が薄い $6D_h$

の場合緩慢であり、逆に $31D_h$ の場合は外壁に向かった移動が顕著である。これらの現象は遠心力に起因することは容易に類推できる。次に、 $\theta=72^\circ$ から 180° までの等値線分布に着目すると $6D_h$ の場合、その等値線分布より流動変化が顕著であることがわかる。 $31D_h$ の場合はその等値線分布に大きな変化は認めら

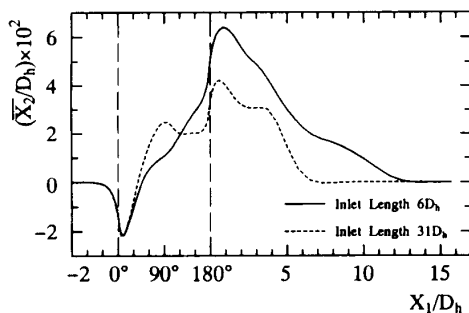


Fig. 17 The development of deviation for streamwise mean velocity from the duct center

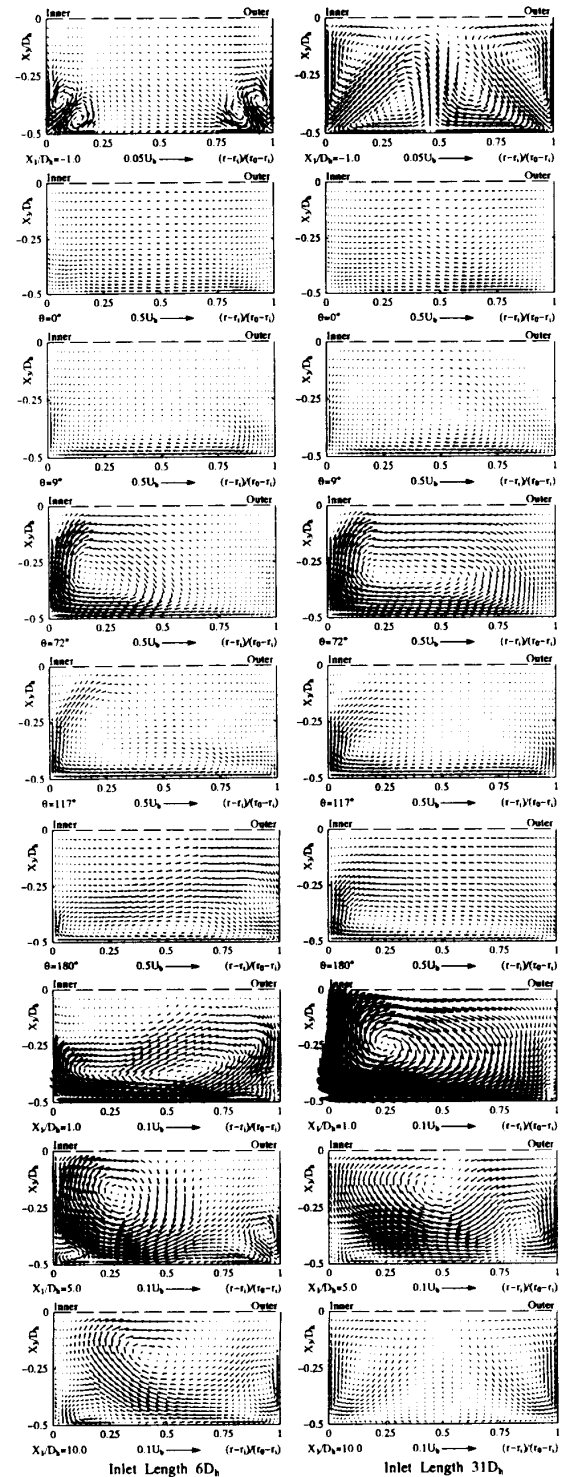


Fig. 18 The difference of secondary flow pattern between $6D_h$ and $31D_h$ inlet lengths

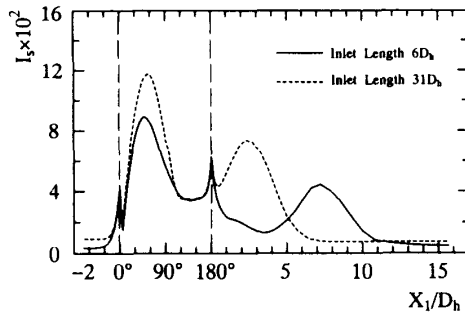


Fig. 19 The development of averaged intensity for secondary flow over the cross section

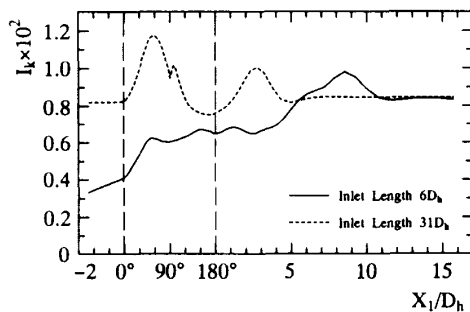


Fig. 20 The development of averaged intensity for turbulent energy over the cross section

れない。こうした主流方向速度の変化を以下に示す式より算出し定量比較した結果を図 17 に示す。

$$\left(\frac{\bar{X}_2}{D_h}\right) = \frac{\iint (X_2 U_1/D_h) dX_2 dX_3}{\iint U_1 dX_2 dX_3} \quad (4)$$

図 17 中の横軸の一部は便宜的に曲がり角にて表示した。図 17 より 120° を境にしてその前領域においては 31D_h のほうが、後の領域においては 6D_h のほうが、出口助走区間路においても大きく変化することが理解できる。この 6D_h の場合の 120° 以降における変化は、二次流れに大きく影響されているものと解釈される。

図 18 は、先に示した円周方向速度等値線と同位置における二次流れベクトルを比較したものである。曲がり入口部において、第 2 種二次流れがいずれの場合も明りように認められるが θ=0° に至っては、その特徴的なパターンは認められず外壁から内壁に向かう二次流れが共通して認められる。この二次流れは θ=9° 近傍より上下対称軸近傍にて逆に、内壁から外壁に向かって流れる。また、6D_h の二次流れに関し、90° 以降、その二次流れはいくつかの渦に分裂し複雑な様相を呈することが両者の差異として指摘できる。この二次流れの分裂は、流入境界層が薄い場合の特徴的な現象と解釈され、先に説明した θ=120° より円周方向速度等

値線の変化が 31D_h の場合と比較して大きくなるのは、この二次流れの渦の分割挙動によるものと解釈される。この二次流れの断面平均強度を以下の式にて定義し比較した結果を図 19 に示す。

$$I_s = \frac{1}{U_b D_h^2} \iint (U_2^2 + U_3^2)^{1/2} dX_2 dX_3 \quad (5)$$

平均二次流れ強度は θ=180° までは 6D_h のほうが小さな値をとること、曲がり入口、出口部にて加速されることなどがその特徴として指摘できる。さらに、曲がり出口部に接続された助走区間路に流入すると、いずれの場合においても二次流れは、その発生位置は異なるものの増速された後、一定値に漸近していくことが図 18, 19 より指摘できる。また、曲がり部を流出し出口直管部における流れ場の回復に着目すると 31D_h のほうが早いことも理解できる。

前述の二次流れ同様、断面内平均乱流エネルギー強度を以下のように定義し比較した結果を図 20 に示す。

$$I_t = \frac{1}{U_b^2 D_h^2} \iint k dX_2 dX_3 \quad (6)$$

6D_h の場合その強度は単調に増加、出口直管部にてピーク値を示すのに対し、31D_h の場合は、曲がり角 60° 近傍と出口直管部にピーク値を有することがその特徴と指摘できる。また、これらのピーク値は平均二次流れ強度の発生位置とほぼ符合している。二次流れ強度は曲がり部内で、両者相似や分布を示したのに対し、乱流エネルギーは相異なる分布を示している。特に、6D_h の場合、曲がり部にて単調増加傾向を示し、二次流れに影響を受けながらも、境界層の発達による乱流生成が行われているものと推察される。

5. 結 論

Iacovides-Launder-Loizou-Zhao⁽⁸⁾ の実験を対象に、三次元乱流場の数値解析を行い、両者の差異分析を行うと同時に、曲がり入口に流入する境界層の違いによる流動変化を検討し以下の結論を得た。

(1) 実験から特徴的な現象として指摘された、上下対称軸上の曲がり角 90°, 135° における円周方向速度分布の速度減少を比較的良好に予測することができた。

(2) 曲がり角 45° の内壁側での円周方向変動速度を計算は大きく予測するが、これは ∂U_θ/∂θ の値に大きく影響されるためと推察される。

(3) 入口境界層が薄い場合に、曲がり部の平均二次流れ強度は完全発達速度流入の場合より小さな値を示す。

(4) 入口境界層が薄い場合には、曲がり角 90° 以

降において二次流れは、いくつかの渦に分裂を始めるカオス的挙動を示す。この結果、90°以降の円周方向等値線も大きな変化を示す。

(5) 入口境界層状態のいかんにかかわらず、曲がり部出口直管部において二次流れは、その発生位置は異なるが増速後減衰し第2種二次流れへと遷移していく。

文 献

- (1) Humphrey, J. A. C., Whitelaw, J. H. and Yee, G., *J. Fluid Mech.*, **103** (1981), 443-463.
- (2) 須藤浩三・板野則弘, 機論, **54** 502, B (1988), 1319-1324.
- (3) 須藤浩三・高見敏弘・板野則弘, 機論, **55** 515, B (1989), 1861-1867.
- (4) Chang, S. M., Humphrey, J. A. C. and Modavi, A., *Physico Chem. Hydrodyn.*, **3** (1983), 243-269.
- (5) Choi, D., Iacovides, H. and Launder, B. E., *Trans. ASME, J. Fluids Eng.*, **111** (1989), 59-68.
- (6) 杉山 均・秋山光庸・山中和典・佐藤晋之, 機論, **61** 581, B (1995), 48-55.
- (7) Taylor, A. M. K. P., Whitelaw, J. H. and Yianneskis, M., *Trans. ASME, J. Fluids Eng.*, **104** (1982), 350-359.
- (8) Iacovides, H., Launder B. E., Loizou, P. A. and Zhao, H. H., *Trans. ASME, J. Fluids Eng.*, **112** (1990), 409-415.
- (9) 杉山 均・秋山光庸・芹沢寿行, 機論, **56** 531, B (1990), 3328-3335.
- (10) Rodi, W., *Z. Angew. Math. Mech.*, **56** (1976), 219-221.
- (11) 杉山 均・秋山光庸・平田 賢・上野智志, 機論, **57** 539, B (1991), 2269-2276.
- (12) Eskinazi, S. and Yeh, H., *J. Aeronaut. Soc.*, **23** 23 (1956), 23-75.