

代数応力モデルによる 180° 曲がり円管内乱流の数値解析*

杉 山 均^{*1}, 秋 山 光 庸^{*1}
篠 原 康 則^{*2}, 人 見 大 輔^{*2}

Numerical Analysis of Three-Dimensional Turbulent Flow in a 180°-Bent Tube Using by an Algebraic Reynolds Stress Model

Hitoshi SUGIYAMA, Mitsunobu AKIYAMA,
Yasunori SHINOHARA and Daisuke HITOMI

A numerical analysis has been performed for three dimensional developing turbulent flow in a 180° bent tube with straight inlet and outlet sections using by an algebraic Reynolds stress model. To our knowledge, only very few numerical investigations exist in which the detailed comparison between calculated results and experimental data contained Reynolds stresses. In numerical analysis, an algebraic Reynolds stress model in conjunction with a boundary-fitted coordinate system is applied to a 180° bent tube in order to solve the anisotropic turbulent structure precisely. As a result of this analysis, it is found that the calculated results show a comparatively good agreement with the experimental data of the time averaged velocity and the secondary vectors in the bent tube and the straight outlet sections. For example, the location of the maximum streamwise velocity, which appears near the top or bottom wall in the bent tube, is predicted correctly by the present method. As for the comparison of Reynolds stresses, the present model has been found to simulate many characteristic features of streamwise normal stress and shear stresses in the bent tube satisfactorily, but has a tendency to underpredict its value. Judging from the comparison between the calculated and the experimental results, the algebraic Reynolds stress model is applicable to the developing turbulent flow in a bent tube which is known as a flow with a strong convective effect.

Key Words: Numerical Analysis, Turbulent Flow, Secondary Flow, Pipe Flow, Algebraic Reynolds Stress Model

1. 緒 言

曲がり管路は広範な分野にわたり活用される工学的重要な機械要素の一つであり、したがって多くの研究が報告されている。しかし、円形断面を有する 180° 曲がり管路内の乱流現象に限定すると、その報告例は比較的少ない。

180° 曲がり円管乱流に関する実験として古くは、Rowe⁽¹⁾ による実験が挙げられる。彼はレイノルズ数 236 000 にて 180° 曲がり円管を対象に解析を行い、曲がり角度 90° 近傍にて局部的に二次流れの逆流現象が生じることを報告している。Azzola-Humphrey-Iacovides-Lauder⁽²⁾, Azzola-Humphrey⁽³⁾ はレーザドップラー流速計にて 180° 曲がり円管を対象にレイノルズ数 57 400, 110 000 の場合について速度分布、各方向速度変動分布を測定している。また青山・森崎・二神⁽⁴⁾ は熱線流速計にて 180° 曲がり円管を対象にレイノルズ数 20 000 について壁面近傍も含めた主

流方向平均速度分布を測定し対数速度分布が成立しなくなる領域があることを示した。一方、乱流熱伝達現象に関し Baughn-Iacovides-Jackson-Lauder⁽⁵⁾ は、Azzola ら⁽²⁾ の流れ場を対象に管路を加熱した場合の曲がり部温度分布、ヌッセルト数分布を比較的詳細に報告している。Anwer-So-Lai⁽⁶⁾ はレイノルズ数 50 000, 曲がり半径比(曲がり流路中心までの曲がり半径/管路半径)が 12.98 と比較的曲がり緩やかな 180° 曲がり円管を対象に、主流方向速度、二次流れ、円形断面内の上下、左右対称軸に沿った 6 成分のレイノルズ応力分布を熱線流速計により測定している。測定は曲がり部のみならず、下流直管部においても行い各乱流諸量の発達挙動について言及している。さらに Anwer-So⁽⁷⁾ は曲がり管内の二次流れを遠心力により生成される二次流れ、遠心力と圧力との不均衡により生成される二次流れ、乱れの非等方性により生成される二次流れ(第 2 種二次流れ)とに分類している。2 番めに定義された二次流れは管路中心部に、3 番めの二次流れは管路外壁近傍に生成されることを同時に指摘している。Anwer ら⁽⁶⁾ が曲がり半径比 12.98 と比較的緩やかな曲がり有するのに対し須藤・高見⁽⁸⁾ は、

* 原稿受付 1996 年 9 月 19 日。

*¹ 正員、宇都宮大学工学部(〒321 宇都宮市石井町 2753)。*² 宇都宮大学大学院。

曲がり半径比 4.0 と比較的曲がりのきつい流れを対象としている。彼らは熱線流速計を用いレイノルズ数 60 000 にて、二次流れ分布とともに 3 成分のレイノルズ応力分布の測定結果を報告している。Anwer ら⁽⁶⁾ が対称軸に沿った局所的なレイノルズ応力分布を示しているのに対し、須藤ら⁽⁸⁾ は断面全体の等値線分布を曲がり部から下流直管部に至るまで示し、乱流モデル評価の観点からすると貴重なデータを提供している。こうした 180° 曲がり管路に関するレイノルズ応力の計測結果が示されるようになったのは、ごく最近になってからである。

一方、180° 曲がり円管内乱流の数値解析に関し、Azzola ら⁽²⁾ は高レイノルズ数形 $k-\epsilon$ 二方程式モデルを用い彼らの実験⁽²⁾⁽³⁾ を対象に数値解析を行っている。著者ら⁽⁹⁾ も、壁面近傍に拡張した低レイノルズ数形 $k-\epsilon$ 二方程式モデルを用いて 180° 曲がり円管内乱流場の解析を報告した。同時に著者ら⁽¹⁰⁾ は Baughn ら⁽⁵⁾ の実験を対象に代表的な温度場二方程式モデルを取り上げ、その特徴を実験との差異分析を通し明らかにした。須藤・高見⁽¹¹⁾ はレイノルズ応力方程式を用いて、青山・土方・二神⁽¹²⁾ は代数応力モデルを用い、最近では Boersma-Nieuwstadt⁽¹³⁾ は LES を用いた解析結果を報告しているが、いずれも完全発達乱流場を対象とし、レイノルズ応力成分を含めた詳細な実験結果との定量比較は報告されていない。また Lai-So-Zhang⁽¹⁴⁾ はレイノルズ応力輸送方程式を用い、Anwer-So⁽⁷⁾ が定義した非等方性乱流により生成される二次流れの存在を予測しているが定量評価はなされていない。彼らは支配方程式を放物形として解いているため曲がり半径比の小さな流れ場には不適である。

以上の研究経緯を踏まえ本研究では、レイノルズ応力までも詳細に測定した須藤・高見⁽⁸⁾ の実験を数値予測することを目的とする。その際レイノルズ応力までも正確に予測する意味からレイノルズ応力輸送方程式を解くことを考えるが、数値計算のうえから障害となる対流、拡散項に関しては代数式で置き換えた代数応力モデルとした。圧力・ひずみ相関項のモデル化に関しては制約条件の一部に改良を加えた乱流モデル⁽¹⁵⁾ を用い、須藤・高見⁽¹¹⁾、青山ら⁽¹²⁾ のモデルとは異なる。また、数値計算に際しては主流方向の拡散項を省略することなくだ円形方程式として解析する。

2. おもな記号

C_p : 圧力係数 $2(P - P_{\text{ref}})/\rho U_b^2$

D : 円管直径

k : 乱流エネルギー

P : 時間平均圧力

P_{ref} : $z_{\text{in}}/D=17.6$ における圧力

Re : レイノルズ数 $= U_b D/\nu$

R : 曲がり曲率中心からの半径方向距離

r : 断面内の半径方向距離

R_c : 曲がり管曲率半径

U_ϕ, U_θ, U_r : ϕ, θ, r 方向時間平均速度

u_ϕ, u_θ, u_r : ϕ, θ, r 方向の変動速度

$\overline{u_i u_j}$: レイノルズ応力

U_b : 断面内の主流方向平均速度

z : 直管における流れ方向座標

ϵ : 乱流散逸

ν : 動粘性係数

ϕ : 曲がり角度

θ : 断面内の円周方向角度

3. 解析手法

3.1 計算対象実験 解析対象とした須藤・高見⁽⁸⁾ の実験装置概略図、ならびに座標系を図 1 に示す。須藤らは作動流体に空気を用い熱線流速計のプロローブを回転させて測定する回転プロローブ法にて、180° 曲がり管内乱流の計測を行った。曲がり部の入口、出口部には、それぞれ 100D, 40D の直円管を設けて曲がり管入口では十分発達した直円管乱流を流入させている。曲がり半径は $R_c=2.0D$ 、円管直径は $D=104$ mm、曲がり半径比は 4 となる。実験はレイノルズ数を $Re=60\,000$ に設定し行っている。

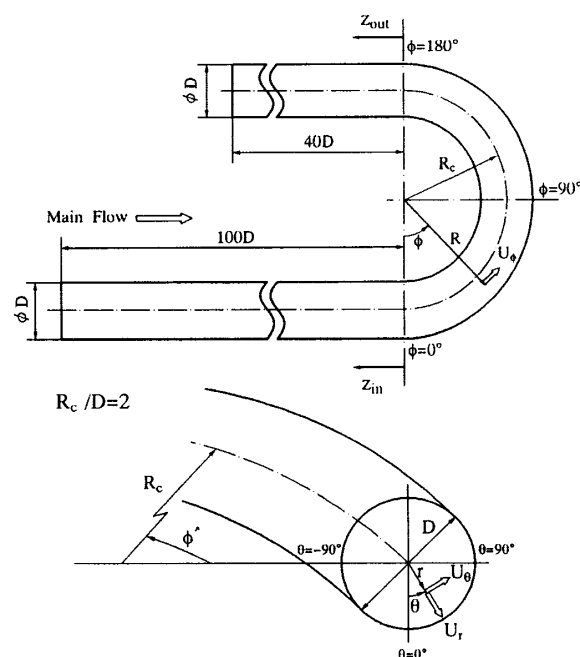


Fig. 1 180° Bent tube and definition of coordinate system

座標系は図1に示すように ϕ, θ, r 方向の時間平均速度をそれぞれ U_ϕ, U_θ, U_r と定義した。また曲がり入口上流, 下流の直管部での位置はそれぞれ z_{in}, z_{out} にて表し矢印の方向を正として各位置を便宜的に示すものとした。

3.2 レイノルズ応力輸送方程式 各レイノルズ応力を正確に扱う意味より, 解析にあたってはレイノルズ応力輸送方程式を解くことを考える。レイノルズ応力方程式の厳密式は次式にて示される。

$$\begin{aligned} \frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} = & \left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial X_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial X_k} \right) \\ & + \frac{P}{\rho} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial X_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial X_i} \right) - \frac{\partial}{\partial X_k} \left\{ \overline{u_i u_j u_k} - \nu \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial X_k} \right. \\ & \left. + \frac{P}{\rho} (\delta_{jk} \overline{u_i} + \delta_{ik} \overline{u_j}) \right\} - 2\nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial X_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial X_k} \dots\dots (1) \end{aligned}$$

式を直接的に解くことは不可能であり, 何らかのモデル化が必要となる。数値計算のうえで, 特に障害となるのが左辺の対流項, ならびに右辺第3項の拡散項である。従来のモデルでは, これらの項を省略してモデル化を行っているが, 対流項, 拡散項の影響を多少とも考慮する意味より, Rodi⁽¹⁶⁾ 近似を用いてモデル化を行った。レイノルズ応力方程式中の圧力・ひずみ相関項のモデル化も特に問題となるが, この項のモデル化, ならびに定数系に関しては別報⁽¹⁵⁾ に詳述した。

3.3 境界適合座標 複雑形状を対象とする場合, 形状に沿って境界条件を設定することが必要となる。境界適合座標系による計算手法は, 物理平面上の解析領域を計算領域へと座標変換し計算平面上で支配方程式を解く手法であり, 境界条件の設定, 方程式の離散化が容易な反面, 変換された支配方程式が複雑になるという特徴をもつ。

支配方程式の計算平面上への変換は次の数学定理より変換される。

$$\frac{\partial}{\partial X_i} = \frac{\partial \xi}{\partial X_i} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial X_i} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \zeta}{\partial X_i} \frac{\partial}{\partial \zeta} \dots\dots\dots (2)$$

式中 ξ, η, ζ は変換された計算平面での座標軸であり主流方向を ζ , 断面方向を ξ, η とし計算格子に沿う座標軸と定義される。上式を用いた各方程式の変換法, 変換により導出される輸送方程式, 反変速度, 計量テンソルなどは別報にて詳述した⁽¹⁷⁾。

3.4 数値解析 計算領域は, 系の対称性を考えて全断面の 1/2 断面とした。実験では曲がり管入口上流部に $100D$ の長さを有する直管を設け完全発達乱流を流入させているが, 計算では計算負荷を低減する意味, および形状は異なるが, だ円断面直管における計算, 乱流計測結果より流れは水力直径の 40 倍程度の

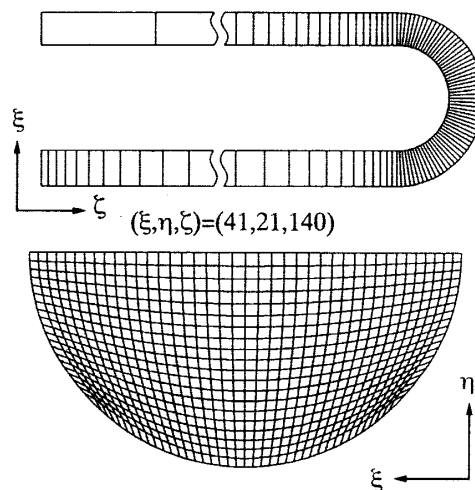


Fig. 2 Computational mesh

長さにおいて十分発達した流れになる⁽¹⁸⁾ ことを考慮し $40D$ とした。曲がり下流部に接続された直管長さは実験と同じ $40D$ とした。本乱流モデルは高レイノルズ数形乱流モデルであり壁面における乱流エネルギー, 乱流散逸の境界条件は壁関数を用いている。また乱流エネルギー, 乱流散逸の直円管入口条件としては, 実験においても不明であるため $k = U_b^2 \times 10^{-5}$, $\epsilon = k^{3/2}/D$ と小さな値を設定し助走管路にて完全発達乱流に発達させた。出口境界条件はノイマン条件とした。式の離散化は, 有限差分近似により行い計算諸量の格子点配置は Regular Grid 法によった。支配方程式の対流項差分近似は QUICK (三次精度の風上差分) を使用した。計算レイノルズ数は, 実験と同一の 60 000 である。計算格子数は 1/2 断面で 41×21 , 主流方向に 140 の計 120 540 点とした。断面内の計算格子, 流れ方向の格子配置を図2に示す。

4. 結果と考察

4.1 平均速度場の比較 図3は曲がり管, 下流直管部における主流方向速度等値線を両結果にて比較したものである。値は断面内平均速度 U_b にて無次元化している。円形断面の左側は曲がり内壁に, 右側は外壁に相当する。曲がり入口に相当する $\phi = 0^\circ$, および 30° においては最大主流方向速度は内壁側に移動し曲がり管流れに特徴的な分布を示している。こうした傾向は特に急な曲がりをもつ流れで顕著である。 $\phi = 60^\circ$ に至ると管路内壁に等値線の突出しが認められ, その等値線分布から低速流体が移流されているようすが認められる。この傾向は $\phi = 90^\circ$ で顕著に認められる。その後この低速流体は曲がりが進むにつれ管中心部まで移動するようすが, $\phi = 105, 120, 150^\circ$ にて認め

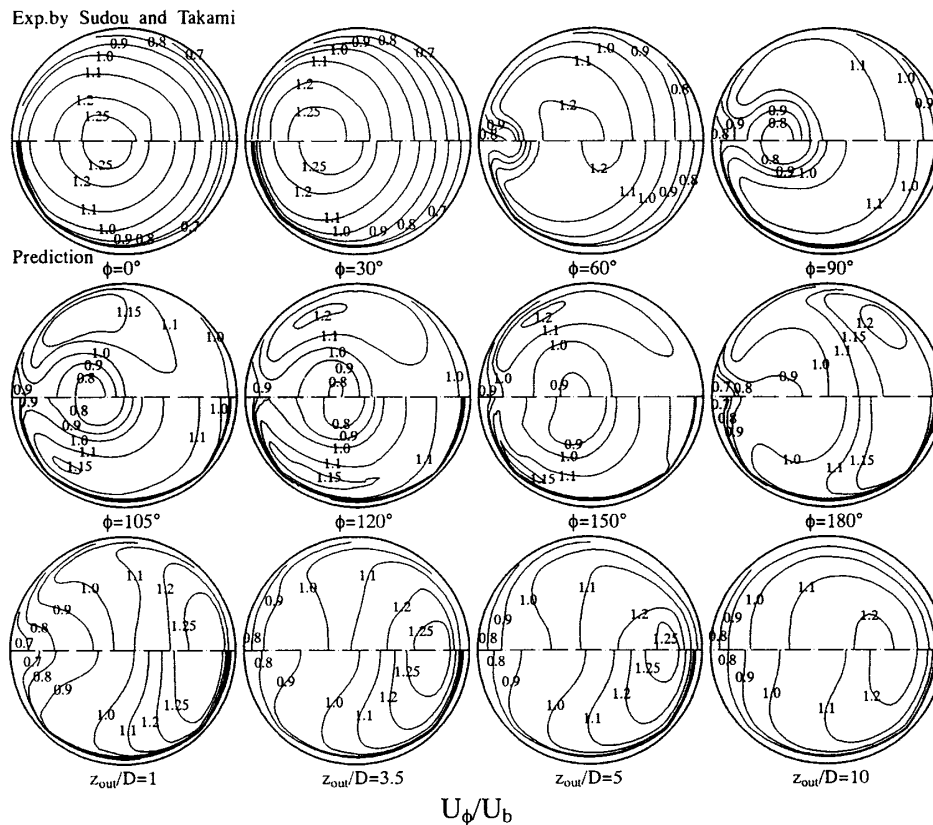
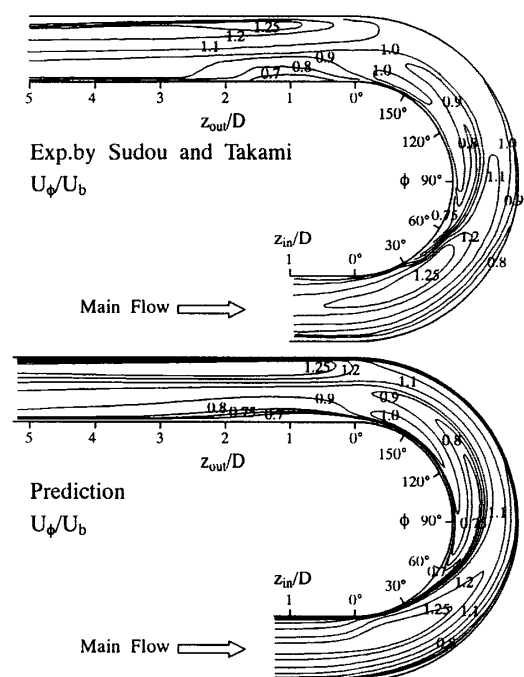


Fig. 3 Comparison of streamwise mean-velocity

られる。曲がり出口の $\phi=180^\circ$ に至ると中心部に認められた低速流体は再度内壁側に形成される。下流直管部に至るとその等値線は完全発達時に認められる同心円分布に漸近することになるが比較的高速の流体が管路外壁側に存在している。以上のような特徴的現象を解析結果は定性的にも定量的にも比較的良好に予測している。また実験結果より $\phi=105, 120, 150, 180^\circ$ では最大主流方向速度が壁面近傍に認められるが、計算も $\phi=180^\circ$ を除いてその最大値を壁近傍に予測している。こうした最大主流方向速度が円周壁近傍に生成される現象は、 90° 曲がり管路では認められず⁽¹⁹⁾、 180° 曲がり管路に特有な現象と考えられる。こうした現象は低速流体が管中心部に移流されると同時に、管中心部に存在した高速流体が円周壁に沿って移動する結果、生成されるものと解釈される。

図4は水平面 ($\theta=\pm 90^\circ$) における主流方向速度の等値線を両結果にて比較したものである。低速領域は $\phi=30^\circ$ から 60° の内壁と下流直管内壁に、高速領域は曲がり入口中心部と下流直管外壁に認められるがその分布形状を含め計算は比較的良好に実験値を予測している。こうした特徴的現象は圧力こう配により生成される二次流れと強い相関を有する。

図5は二次流れベクトル図を両結果にて比較したも

Fig. 4 Comparison of streamwise mean-velocity on ± 90 plane

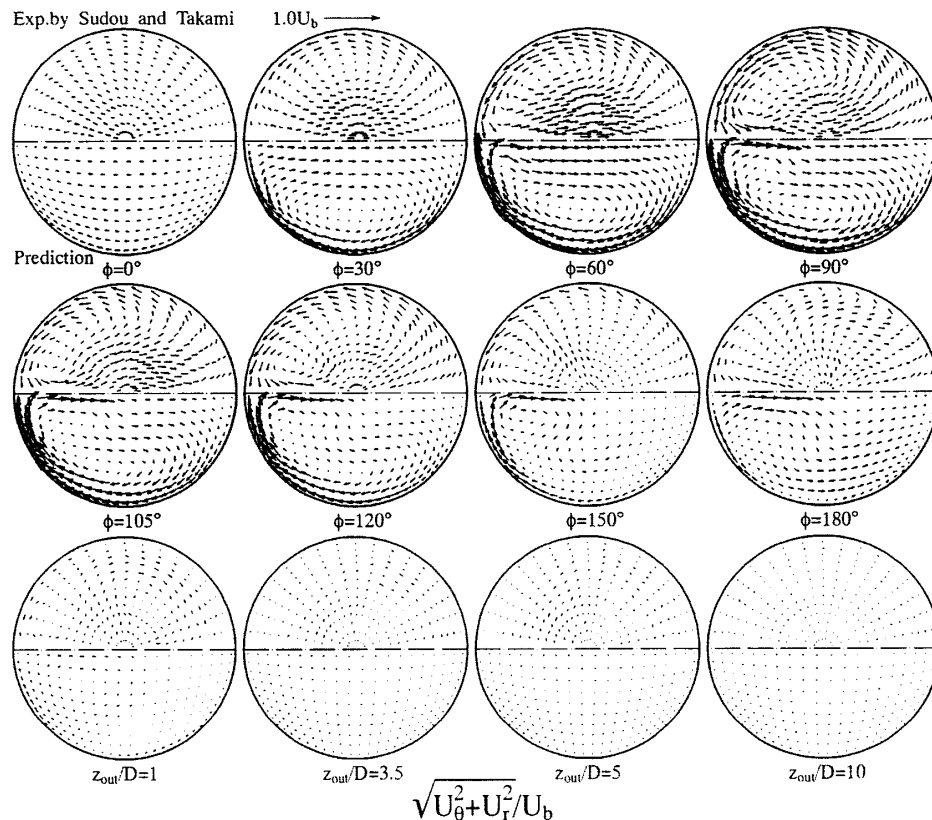


Fig. 5 Comparison of the secondary flow

のである。 $\phi=0^\circ$ では外壁の高い圧力より外壁から内壁に向かう二次流れが流れ場全体にわたり両結果ともに認められる。 $\phi=30^\circ$ からは上下対称軸に沿って内壁から外壁に向かう流れが形成され断面内で一对の二次流れを形成する。こうした二次流れは曲がりが進むにつれ、その速度を増速させ、低速流体を内壁に大きく移流させる。その結果、等値線分布はより大きくひずむことになる。しかし、 90° 以降は逆に減速する方向に転ずることが両結果より理解できる。また下流直管部においては二次流れ強度は急激に減衰することも両結果にて共通している。Lai ら⁽¹⁴⁾ は管路外壁近傍に非等方性乱流により生じる二次流れ(第2種二次流れ)の存在を予測しているが、本解析の場合曲がりがつきつことよりそうした二次流れは両結果ともに認められない。

図6は断面内の $\theta = \pm 90^\circ, \pm 45^\circ, 0^\circ$ の位置での管壁に沿った圧力係数分布を比較した結果である。曲がり入口近傍における外壁側での逆圧力こう配、内壁側での順圧力こう配が両結果に認められる。こうした圧力分布より曲がり入口における外壁から内壁に向かう二次流れは生成されるものと解釈される。 $\theta = -90^\circ$ (Inner) の位置における圧力係数分布に着目すると実験値は $\phi = 75^\circ$ を境にして増加、減少傾向を示し大き

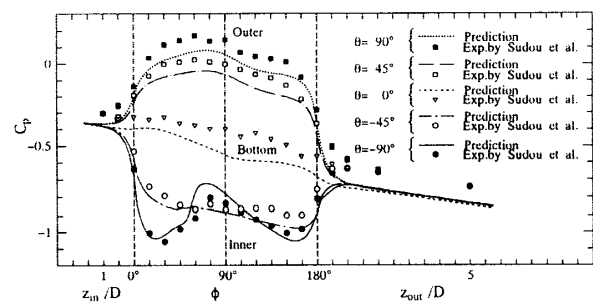


Fig. 6 Comparison of wall static pressure variation

く変動し、他の位置とは異なる分布を示すが計算もこの傾向を定量的に捕そくしている。 $\phi = 90^\circ$ 手前にて増加するのは 90° 以降の曲がり外壁が内壁に沿う流れにとって抵抗として作用するためと解釈される。したがって $\theta = -90^\circ$ における分布は 180° 曲がり管路に特有な分布と考えられる。

4.2 変動速度場の比較 図7は主流方向変動速度を比較した結果である。 $\phi = 0^\circ$ で等値線は内壁側にわずかに寄る分布を示す。その後曲がり角度が大きくなるにつれ内壁側にて乱れの強い領域を、円周壁面に沿って内壁側の乱れ強度より乱れの弱い領域を形成することを特徴的な現象として指摘できる。また実験では $\phi = 105^\circ$ にて18%に達する大きな値が認められる。

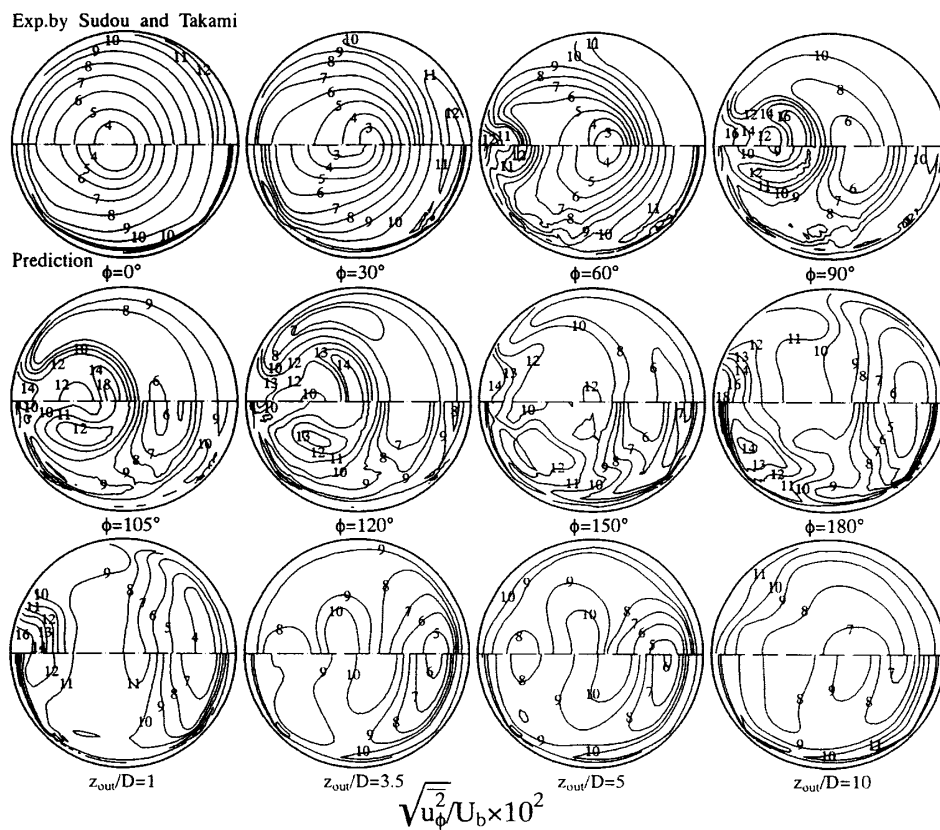


Fig. 7 Comparison of streamwise velocity fluctuation

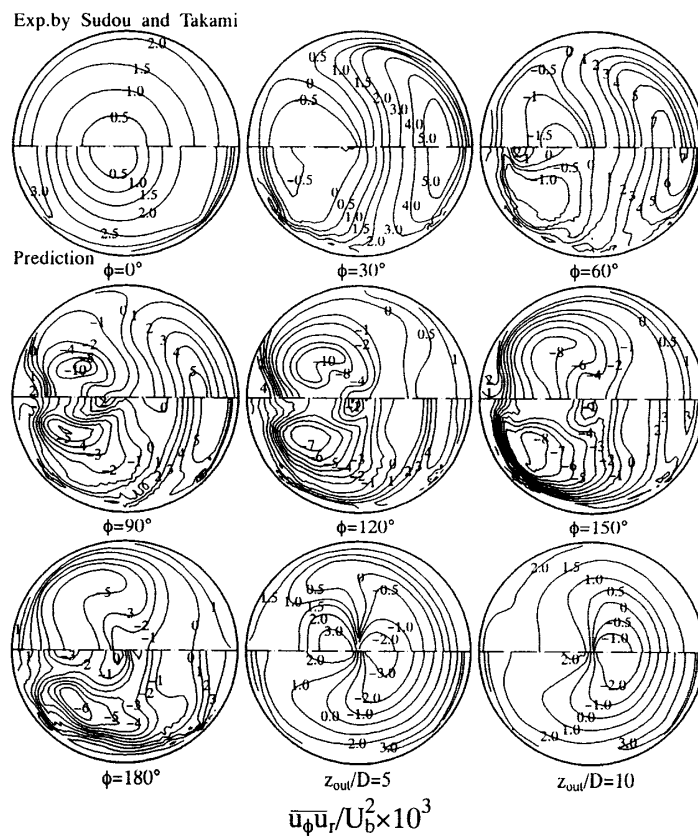
Fig. 8 Comparison of shear stress $\overline{u_\phi u_r}$

Fig. 9 Comparison of shear stress $\overline{u_\phi u_\theta}$

計算はその最大値を予測するには至らぬものの、こうした現象を比較的良好に予測している。曲がり出口近傍から下流直管部の $z_{out}/D=1$ にかけても内壁側に大きな値が認められ両結果にて共通している。さらに下流の $z_{out}/D=10$ では、流れが回復した際には得られるであろう同心円状等値線分布とは異なり、変動速度が回復するには長い距離が必要であることを両結果ともに示唆している。

図 8, 9 にそれぞれせん断応力 $\overline{u_\phi u_r}$, $\overline{u_\phi u_\theta}$ を比較した結果を示す。図 8 に示す実験結果のせん断応力 $\overline{u_\phi u_r}$ 分布より、 $\phi=0^\circ$ における同心円状等値線分布に曲がりが進むにつれ零ライン等値線が形成され、内壁側にて負の値を有する領域が発達すること、およびその絶対値の最大値が上下対称軸より上方に生成されることが理解できる。また、下流直管部においては零ラインは管路中央部にて島状分布を呈し内外壁に正の値を有する領域を形成し曲がり部とは大きく異なることが理解できる。こうした特徴的現象を計算は比較的良好に予測しているといえる。一方、せん断応力 $\overline{u_\phi u_\theta}$ は $\phi=0, 30^\circ$ より上下壁近傍にて最大値を取る。 $\phi=60^\circ$ 以降になると内壁近傍に零ラインが形成され異符号領域を形成する。計算はこの異符号領域を $\phi=150^\circ$ までは比較的良好に予測するが、曲がり出口にお

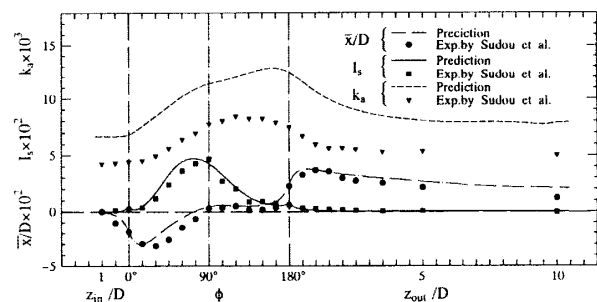


Fig. 10 Comparison of mean-value of turbulent energy, secondary flow and deviation for streamwise velocity from the tube center

いては実験と多少異なる分布を示している。下流直管部に至ると零ラインは円周壁に沿った分布として形成され管路は負領域で占められることが両結果より理解できる。以上にしたレイノルズ応力分布の実験との比較結果は、代数応力モデルにおいても、この種の対流現象が支配的な曲がり管路における乱流構造を定性、定量的に予測することが可能であることを示唆している。

4.3 断面平均量比較 須藤ら⁽⁸⁾より定義された主流の偏り $\bar{x}/D$, 二次流れ, 乱流エネルギーの断面内平均量 I_s , k_a について比較した結果を図 10 に示す。各値は以下の式にて示される。

$$\frac{\bar{x}}{D} = \frac{8}{\pi D^2 U_b} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{D/2} \frac{r \sin \theta}{D} U_\phi r dr d\theta \quad \dots (3)$$

$$I_s = \frac{8}{\pi D^2 U_b^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{D/2} (U_\theta^2 + U_r^2) r dr d\theta \quad \dots (4)$$

$$k_a = \frac{8}{\pi D^2 U_b^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{D/2} \frac{1}{2} (\overline{u_\phi^2} + \overline{u_\theta^2} + \overline{u_r^2}) r dr d\theta \quad \dots (5)$$

実験結果より主流の偏りは曲がり入口で内壁側に寄った後、外壁に移行し曲がり出口近傍から急激に増加、下流直管で最大点を有することがわかるが、計算結果はこの現象を良好に予測している。断面平均二次流れ強さは実験、計算とも $\phi=90^\circ$ 近傍で最大値を取った後減少する。しかし平均乱流エネルギーに関しては定性的な特徴はとらえているものの定量的には差が認められる。

5. 結 論

180° 曲がり円管内乱流場を対象に代数応力モデル、境界適合座標を用い数値解析を行った。解析結果は須藤・高見⁽⁸⁾の実験と比較して以下の結論を得た。

(1) 主流方向平均速度は曲がり管の内壁近傍で低速領域を形成し、曲がり角度 90° 以降にて最大主流方向速度が円周壁近傍に存在するが、本解析手法もこうした特徴的現象を定量、定性的に予測した。

(2) 本解析手法は、二次流れベクトルの発達挙動を断面内の平均速度変化とともに比較的良好に予測した。

(3) 主流方向変動速度に関して、本解析手法は値を小さく予測するものの曲がり角度 60° 以降認められる内壁での乱れの強い領域の生成、下流直管部における応力分布を比較的良好に予測した。

(4) セン断応力 $\overline{u_\phi u_r}$ は曲がり部にて零ラインを挟んで内外壁に異符号領域を、下流直管では管路中心部で零ラインを挟んで中心と外周に異符号領域を形成するが、計算はこうして現象を比較的良好に予測した。

(5) セン断応力 $\overline{u_\phi u_\theta}$ は円周壁に沿って高い値を示し、曲がり角度 60° 以降で異符号領域を形成することになるが計算もほぼ同様な結果を示した。ただし曲がり出口に相当する $\phi=180^\circ$ では差が認められた。

(6) 曲がり管路は対流現象が顕著な代表的流れ場であり、対流効果よりその乱流構造も複雑な様相を呈するが、代数応力モデルでも曲がり管内の複雑乱流構造を予測することが可能であることを示した。

文 献

- (1) Rowe, M., *J. Fluid Mech.*, **43** (1970), 771-783.
- (2) Azzola, J., Humphrey, J. A. C., Iacovides, H. and Lauder, B. E., *Trans. ASME, J. Fluid Eng.*, **108** (1986), 214-221.
- (3) Azzola, J. and Humphrey, J. A. C., *Univ. of California, Rep.*, LBL 17681 (1984).
- (4) 青山善行・森崎秀行・二神浩二, 第 30 回日本伝熱シンポジウム講演論文集, II (1993 5), 520-522.
- (5) Baughn, J. W., Iacovides, H., Jackson, D. C. and Lauder, B. E., *Trans. ASME, J. Heat Transf.*, **109** (1987), 43-48.
- (6) Anwer, M., So, R. M. C. and Lai G., *Phys. Fluids, A*, **1-8** (1989), 1387-1397.
- (7) Anwer, M. and So, R. M. C., *Exp. Fluids*, **14** (1993), 85-96.
- (8) 須藤浩二・高見敏弘, ターボ機械, **20** 12 (1991), 33-38.
- (9) 杉山均・秋山光庸・菊池裕, 機論, **61**-585, B (1995), 1707-1713.
- (10) 杉山均・秋山光庸・清水利壽, 機論, **62**-596, B (1996), 1530-1537.
- (11) 須藤浩二・高見敏弘, 機論, **54**-506, B (1988), 2755-2761.
- (12) 青山善行・土方邦夫・二神浩二, 機論, **56**-528, B (1990), 2300-2308.
- (13) Boersma, B. J. and Nieuwstadt F. T. M., *Trans. ASME, J. Fluid Eng.*, **118** (1996), 248-254.
- (14) Lai, Y. G., So, R. M. C. and Zhang H. S., *Theore. Comput. Fluid Dyn.*, **3** (1991), 163-180.
- (15) 杉山均・秋山光庸・芹沢寿行, 機論, **56**-531, B (1990), 3328-3335.
- (16) Rodi, W., *Z. Angew. Math. Mech.*, **56** (1976), 219-221.
- (17) 杉山均・秋山光庸・平田賢・土野智志, 機論, **57**-539, B (1991), 2269-2276.
- (18) 杉山均・秋山光庸・八鍬喜規・若山英樹, 機論, **60**-571, B (1994), 842-848.
- (19) 須藤浩二・高見敏弘・矢野賢司, 機論, **58**-548, B (1992), 1015-1021.