

代数応力モデルによる 90° 曲がり円管内乱流の数値解析*

杉 山 均^{*1}, 秋 山 光 庸^{*1}
篠 原 康 則^{*2}, 人 見 大 輔^{*2}Numerical Analysis of Three-Dimensional Turbulent Flow
in a 90° Bent Tube by Algebraic Reynolds Stress ModelHitoshi SUGIYAMA, Mitsunobu AKIYAMA,
Yasunori SHINOHARA and Daisuke HITOMI

A numerical analysis has been performed for three dimensional developing turbulent flow in a 90° bent tube with straight inlet and outlet sections by an algebraic Reynolds stress model. To our knowledge, very little has been reported about detailed comparison between calculated results and experimental data containing Reynolds stresses. In calculation, an algebraic Reynolds stress model together with a boundary-fitted coordinate system is applied to a 90° bent tube in order to solve anisotropic turbulent flow precisely. The calculated results display comparatively good agreement with the experimental data of time averaged velocity and secondary vectors. In addition, the present method predicts as a characteristic feature that the intensity of secondary flow near the inner wall is increased immediately downstream from the bend outlet by the pressure gradient. With regard to comparison of Reynolds stresses, the present method is able to reproduce well the distributions of streamwise normal stress and shear stress defined streamwise and radial velocity fluctuation except for the shear stress defined streamwise and circumferential velocity fluctuation. The present calculation has been found to simulate many features of the developing flow in bent tube satisfactorily, but it has a tendency to underpredict the Reynolds stresses.

Key Words: Numerical Analysis, Turbulent Flow, Secondary Flow, Pipe Flow, Algebraic Reynolds Stress Model

1. 緒 言

曲がり管は機械, 伝熱, 原子力, 航空, 宇宙, 化学工学など広範囲な分野にわたり活用され工学上重要な機械要素の一つである。曲がり管は比較的単純な流路形状をしているが断面内での圧力こう配変化により二次流れが生成され条件によっては, はく離現象を伴いその流動挙動は複雑である。また乱流場に至るとさらに興味ある現象を内包する。すなわち非円形断面曲がり管の入口, 出口近傍においては第1種, 第2種二次流れが共存, 遷移する現象が存在することになる。したがって, 曲がり管に関する研究は多くの側面から検討されている。本研究では特に乱流場における曲がり円管内の流れを対象とした。

曲がり円管乱流に関する実験としては古くは Rowe⁽¹⁾ による実験が挙げられる。彼はレイノルズ数 236 000 にて 180° 曲がり円管を対象に解析を行い, 曲がり角度 90° 近傍にて局部的に二次流れの逆流現象が生じることを報告している。Enayet-Gibson-Taylor⁽²⁾ は 90° 曲がり管を対象にレイノルズ数 43 000 にてレー

ザドプラー流速計を用い主流方向平均速度, 主流方向変動速度を測定し内壁近傍でその等値線が大きく変化することを報告している。Azzola-Humphrey-Iacovides-Lauder⁽³⁾, Azzola-Humphrey⁽⁴⁾ はレーザドプラー流速計にて 180° 曲がり円管を対象にレイノルズ数 57 400, 110 000 の場合について速度分布, 各方向速度変動分布を測定している。また青山・森崎・二神⁽⁵⁾ は熱線流速計にて 180° 曲がり円管を対象にレイノルズ数 20 000 について壁面近傍も含めた主流方向平均速度分布を測定し対数速度分布が成立しなくなる領域があることを示した。以上のように比較的多くの乱流計測が報告されているが, セン断応力も含めたレイノルズ応力成分に関する計測は少ない。こうした計測結果が示されたのは最近であり須藤・高見・矢野⁽⁶⁾ は熱線流速計を用いレイノルズ応力成分, 二次流れに関する詳細な計測結果を報告している。

一方, 曲がり円管内乱流の数値解析は高レイノルズ数形 $k-\epsilon$ 二方程式モデルを用い Patankar-Pratap-Spalding⁽⁷⁾ により初めて解析されている。Azzola⁽³⁾ も標準的な二方程式モデルを用い, 彼らの行った実験⁽³⁾⁽⁴⁾ を対象に数値解析を行っている。著者ら⁽⁸⁾ も, 壁面近傍に拡張した低レイノルズ数形 $k-\epsilon$ 二方程式モデルを用いて曲がり円管内乱流場の解析を報告し

* 原稿受付 1996 年 9 月 5 日。

*¹ 正員, 宇都宮大学工学部 (〒321 宇都宮市石井町 2753)。*² 宇都宮大学大学院。

た。これに対して、須藤・高見⁽⁹⁾はレイノルズ応力方程式を用いて、青山・土方・二神⁽¹⁰⁾は代数応力モデルを用い完全発達乱流場を対象に解析を行い、実測値との差異分析を報告している。最近では Boersma-Nieuwstadt⁽¹¹⁾より LES による結果も報告されている。以上のように数値解析も実験同様いくつかの結果が代表的な乱流モデルを用い報告されているがレイノルズ応力成分を含め予測し実験と詳細に比較した例は報告されていない。

そこで、本研究ではレイノルズ応力までも詳細に測定した須藤・高見・矢野⁽⁶⁾の実験を対象に数値計算を行い、彼らの実験と比較することより解析手法、乱流モデルの妥当性を明らかにすると同時に、その流動挙動に関し新たな知見を得ることを目的とする。このとき、乱流モデルとしては対流、拡散項を代数式で置き換えた代数応力モデルとし、レイノルズ応力方程式中の圧力・ひずみ相関項のモデル化に際しては制約条件の一部に改良を加えた非等方性乱流モデル⁽¹²⁾を用い、須藤・高見⁽⁹⁾、青山ら⁽¹⁰⁾のモデルとは異なる。

2. おもな記号

- C_p : 圧力係数
- D : 円管直径
- k : 乱流エネルギー
- Re : レイノルズ数 $U_b D / \nu$
- R : 曲がり曲率中心からの半径方向距離
- r : 断面内の半径方向距離
- R_c : 曲がり管曲率半径
- U_ϕ, U_θ, U_r : ϕ, θ, r 方向時間平均速度
- u_ϕ, u_θ, u_r : ϕ, θ, r 方向の変動速度
- $u_i u_j$: レイノルズ応力
- U_b : 断面内の主流方向平均速度
- z : 直管における流れ方向座標
- ε : 乱流散逸
- ν : 動粘性係数
- ϕ : 曲がり角度
- θ : 断面内の円周方向角度

3. 解析手法

3.1 計算対象実験 解析対象とした須藤ら⁽⁶⁾の実験装置概略図、ならびに座標系を図1に示す。須藤ら⁽⁶⁾は作動流体に空気を用い熱線流速計にて90°曲がり管内乱流の計測を行った。曲がり部の入口、出口部には、それぞれ100D、40Dの直円管を設けて曲がり管入口では十分発達した直円管乱流を流入させている。曲率半径は $R_c = 2.0D$ 、円直径は $D = 104 \text{ mm}$ で

ある。実験は、レイノルズ数を $Re = 60\,000$ に設定し行っている。

座標系は図1に示すように、 ϕ, θ, r 方向の時間平均速度をそれぞれ U_ϕ, U_θ, U_r と定義した。また曲がり入口上流、下流の直管部での位置はそれぞれ z_{in}, z_{out} にて表し矢印の方向を正として各位置を便宜的に示すものとした。

3.2 レイノルズ応力輸送方程式 各レイノルズ応力を正確に扱う意味より、解析にあたってはレイノルズ応力輸送方程式を解くことを考える。レイノルズ応力方程式の厳密式は次式にて示される。

$$\begin{aligned} \frac{D \overline{u_i u_j}}{Dt} = & - \left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial X_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial X_k} \right) \\ & + \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) - \frac{\partial}{\partial X_k} \left\{ \overline{u_i u_j u_k} - \nu \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial X_k} \right. \\ & \left. + \frac{p}{\rho} (\delta_{ij} u_k + \delta_{ik} u_j) \right\} - 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \frac{\partial u_j}{\partial X_k} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (1)$$

式を直接的に解くことは不可能であり、何らかのモデル化が必要となる。数値計算のうえで、特に、障害となるのが左辺の対流項、ならびに右辺第3項の拡張項である。従来のモデルでは、これらの項を省略してモデル化を行っているが、対流項、拡散項の影響を多少とも考慮する意味より、Rodi⁽¹³⁾近似を用いてモデル化を行った。レイノルズ応力方程式中の圧力・ひずみ相関項のモデル化も特に問題となるが、この項のモデル化、ならびに定数系に関しては別報⁽¹²⁾に詳述した。

3.3 境界適合座標 複雑形状を対象とする場合、形状に沿って境界条件を設定することが必要となる。境界適合座標系による計算手法は、物理平面上の解析領域を計算領域へと座標変換し計算平面上で支配方程式を解く手法であり、境界条件の設定、方程式の離散化が容易な反面、変換された支配方程式が複雑になる

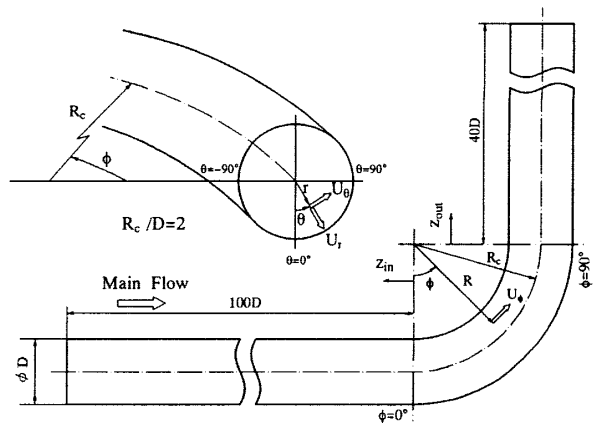


Fig. 1 90°-bent tube and definition of coordinate system

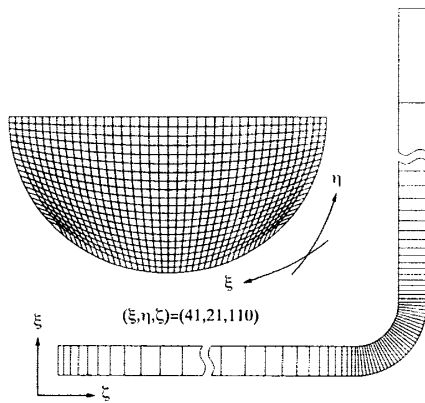


Fig. 2 Computational mesh

という特徴をもつ。

支配方程式の計算平面上への変換は次の数学定理より変換される。式中 ξ, η, ζ は変換された計算平面での座標軸であり主流方向を ζ , 断面方向を ξ, η とし計算格子に沿う座標軸と定義される。

$$\frac{\partial}{\partial X_i} = \frac{\partial \xi}{\partial X_i} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial X_i} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \zeta}{\partial X_i} \frac{\partial}{\partial \zeta} \quad \dots\dots\dots (2)$$

上式を用いた各方程式の変換法, 変換により導出される輸送方程式, 反変速度, 計量テンソルなどは別報にて詳述した⁽¹⁴⁾。

3・4 数値解析 計算領域は, 系の対称性を考えて全断面の 1/2 断面とした。実験では曲がり管入口上流部に $100D$ の長さを有する直管を設け完全発達乱流を流入させているが, 計算では計算負荷を低減する意味, および形状は異なるが, だ円断面直管における計算, 乱流計測結果より流れは水力直径の 40 倍程度の長さにおいて十分発達した流れになる⁽¹⁵⁾ ことを考慮し $40D$ とした。曲がり下流部に接続された直管長さは実験と同じ $40D$ とした。本乱流モデルは高レイノルズ数形乱流モデルであり壁面における乱流エネルギー, 乱流散逸の境界条件は壁関数を用いている。また乱流エネルギー, 乱流散逸の直円管入口条件としては, 実験においても不明であるため $k = U_b^2 \times 10^{-5}$, $\varepsilon = k^{3/2}/D$ と小さな値を設定し助走管路にて完全発達乱流に発達させた。出口境界条件はノイマン条件とした。式の離散化は, 有限差分近似により行い計算諸量の格子点配置は Regular Grid 法によった。支配方程式の対流項差分近似は QUICK (三次精度の風上差分) を使用した。計算レイノルズ数は, 実験と同じ $Re = 60\,000$ である。計算格子数は 1/2 断面で 41×21 , 主流方向に 110 の 94 710 点とした。断面内の計算格子, 流れ方向の格子配置を図 2 に示す。図 2 に示すように計

算格子は不等間隔格子とした。

4. 結果と考察

4・1 平均速度場の比較 図 3 は直管, 曲がり管における主流方向速度等値線を両結果にて比較したものである。値は断面内平均速度 U_b にて無次元化している。円形断面の左側は曲がり管内壁に, 右側は外壁に相当する。 $z_{in}/D=1$ では両結果とも同心円上の等値線分布を示し, この領域では曲がりの影響は認められない。 $\phi=0, 30^\circ$ においては最大主流方向速度は内壁側に移動し曲がり管流れに特徴的な分布を示している。こうした傾向は特に急な曲がりをもつ流れで顕著である。これは曲がり管入口近傍では流れ方向の圧力こう配が外壁では逆圧力こう配に, 内壁では順圧力こう配になっていることに起因している。 $\phi=60^\circ$ では内壁側に低速流体が移流され, その等値線が内壁側から管中心部に向かって突き出した分布を示すことが認められる。この傾向はさらに下流の $\phi=90^\circ$ にて顕著であり計算結果は比較的良好に実験値を予測している。こうした等値線分布の湾曲は断面内の二次流れ挙動に起因している。

曲がり出口直管に流入すると, 二次流れは減衰するものの低速度領域は管中心部まで移動することが $z_{out}/D=1, 2$ より認められる。同時に $z_{out}/D=5$ に至ると低速領域は徐々に加速されて一様な速度分布に変化する。この位置では 1.1 の等値ラインのようにその領域は, 実験と異なるが計算はその現象変化を捕そくしている。 $z_{out}/D=10$ 断面では二次流れは減衰し等値線分布は, 同心円上の速度分布に漸近していくと考えられるが, 上流直管で認められたような対称な分布形には回復しておらず, 回復には長い距離が必要なことを示唆している。実験は内壁側でひずんだ等値線分布を示しているが計算では外壁側でひずみは大きく実験値と異なる。

図 4 は断面内の $\theta=\pm 90, 0^\circ$ の位置での管壁に沿った圧力係数分布を比較した結果である。曲がり入口近傍における外壁側での逆圧力こう配, 内壁側での順圧力こう配を計算は良好に予測しており, こうした結果が前述の等値線分布の内壁側への偏りを再現することにつながっているものと解釈される。計算と実験では $\theta=0^\circ$ の位置における分布に差が認められる。曲がり部ではつねに外壁側の圧力が内壁のそれより大きな値を取るが, 下流直管においてはその関係が逆転する領域が現れ二次流れに少なからぬ影響を及ぼすものと思われる。こうした圧力係数の逆転も実験同様, 計算は再現している。

Exp.by Sudou et al.

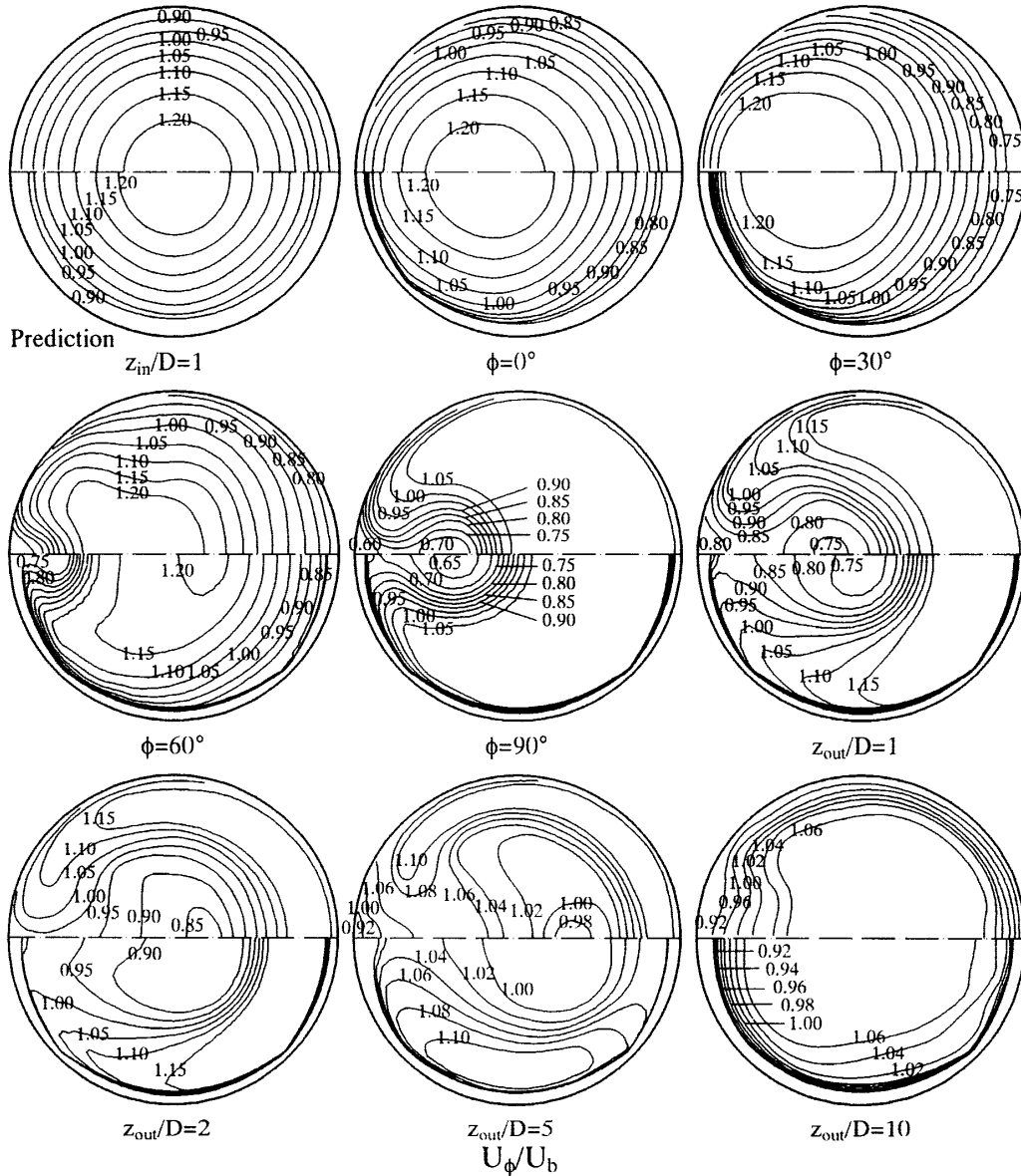


Fig. 3 Comparison of streamwise mean-velocity

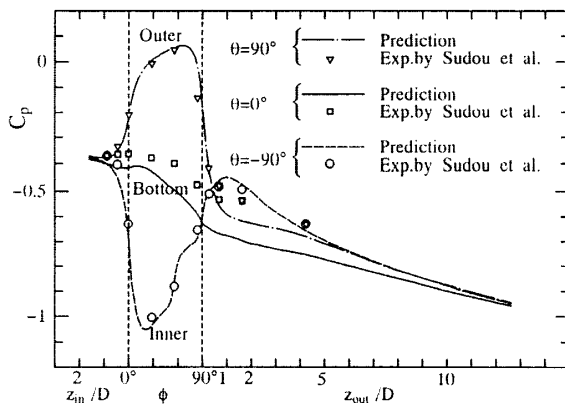


Fig. 4 Comparison of wall static pressure variation

図5は上下対称軸 ($\theta = \pm 90^\circ$), および左右対称軸 ($\theta = 0^\circ$) に沿う主流方向速度 U_ϕ , 円周方向速度 U_θ を両結果にて比較してものである。 $\theta = 60^\circ$ から内壁側に低速領域が生成され, その分布が大きく変化することが実験より理解できる。 計算はその変動分布を予測するものの, 定量的には実験値と多少差が認められ実験値を小さく予測する傾向にある。 下流直管においても主流方向速度は大きく変動しているが, 計算は定量的にも比較的良好に実験値を予測している。 また, 円周方向速度分布に関しても実験値とは大きな差は認められない。

図6は二次流れベクトル図を両結果にて比較してものである。 断面の左側は内壁, 右側は外壁に相当す

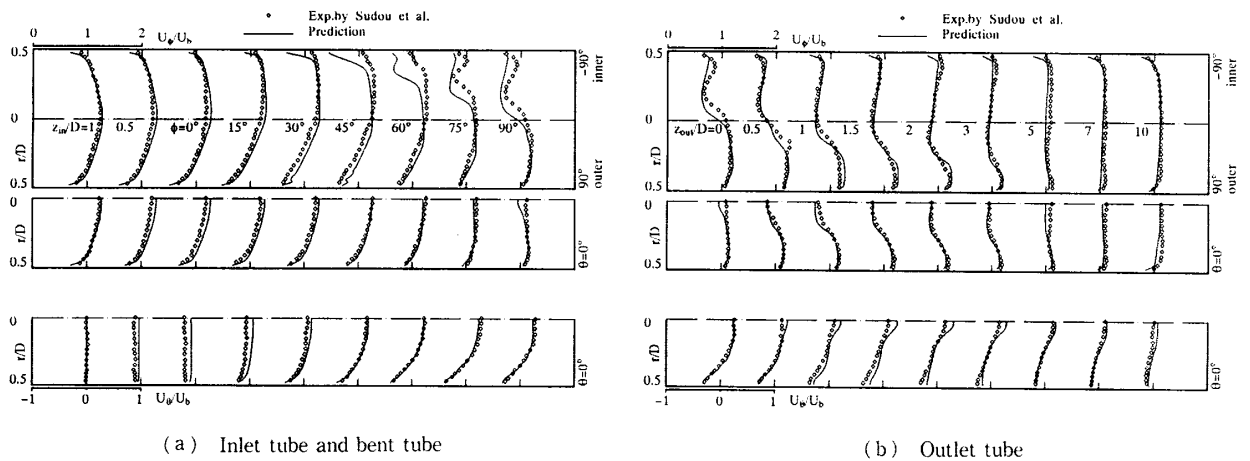


Fig. 5 Comparison of streamwise and radial mean-velocity

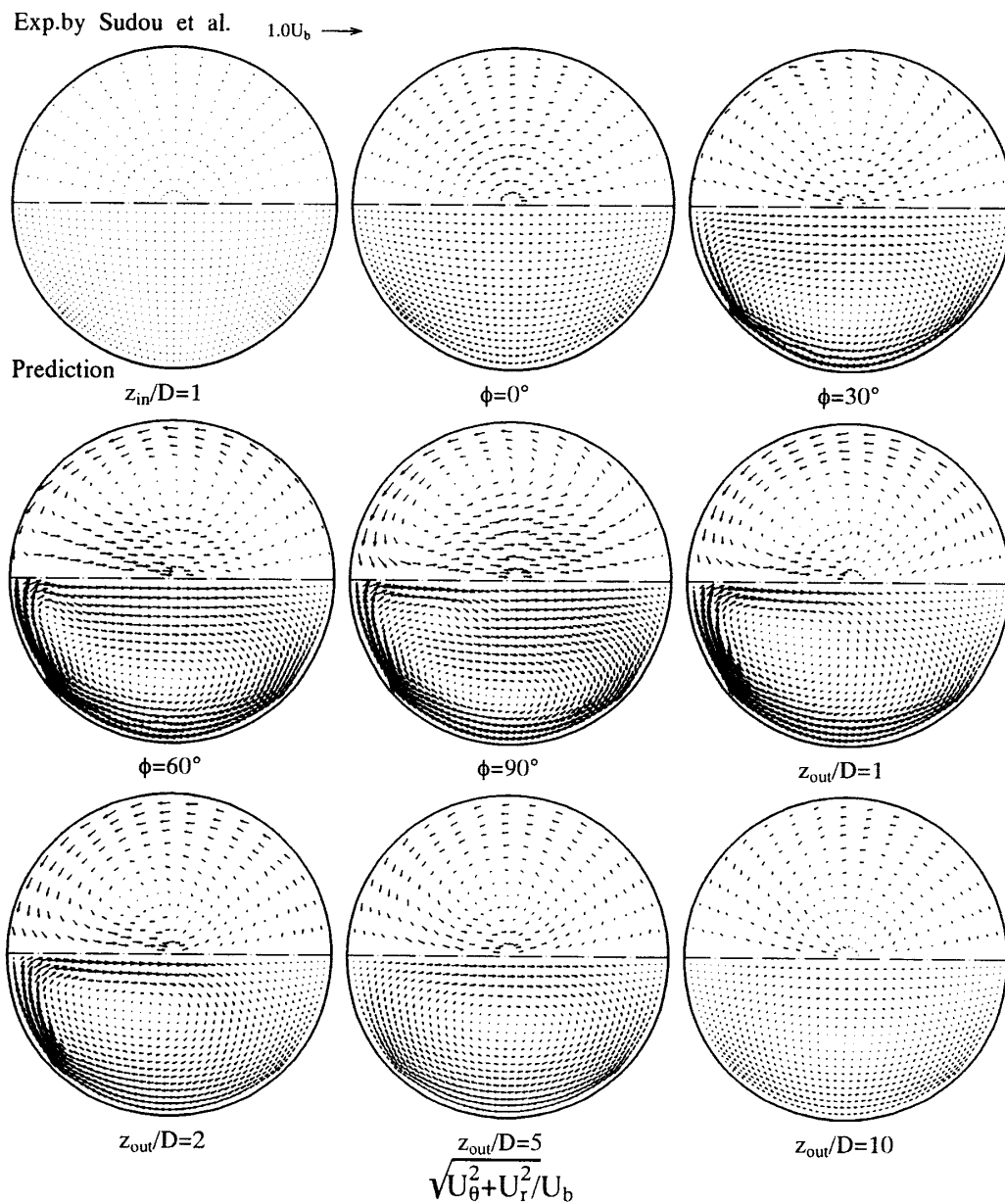


Fig. 6 Comparison of the secondary flow

る。 $\phi=0^\circ$ では外壁の高い圧力より外壁から内壁に向かう二次流れが実験、計算とも断面全体に認められる。 $\phi=30^\circ$ では壁面に沿って外壁から内壁に向かう流れが形成され断面内で一對の二次流れを形成する。こうした二次流れは発達するにつれ、その強度を加速させていくが $\phi=60, 90^\circ$ 断面から明らかなようにその強度は内壁側の壁面から上下対称軸に沿って大きな値を示している。こうした現象は両結果に共通した点であり、内壁近傍の低速流体が二次流れにより上下対称軸に沿って移流される結果、図3に示したような主流方向速度等値線のひずみを生成させている。計算結果の $\phi=90^\circ$, $z_{out}/D=1$ における内壁側の上下対称軸近傍の二次流れを比較すると、 $\phi=90^\circ$ では壁面から3点めまでに比較的大きな二次流れが認められるのに対し $z_{out}/D=1$ では壁面から4点めまで認められる。これは図4に示したように曲がり管出口直管では内壁側の圧力が外壁のそれと比較して大きな値を有することにより二次流れが一時的に加速されたことに起因するものと解釈される。このことは実験では顕著に認められない。こうした特徴的な挙動を示した後二次流れは、減衰し消滅することになるが $z_{out}/D=10$ よりわかるように両結果ともわずかな強度を有する二次流れが存

在し曲がりの影響は下流まで及ぶことが両結果より理解できる。

4.2 変動速度場の比較 図7は主流方向変動速度を比較した結果である。 $\phi=0, 30^\circ$ では等値線は内壁側によりかつ外壁に比較的大きな値を有し $\phi=60^\circ$ に至ると内壁にも大きな値が生成されることが両結果に共通して認められる。 $\phi=90^\circ$ に至ると内壁側の変動速度はその値を増加するがその最大値の位置に関しては両者で異なっている。下流直管部に流入するとその最大値は減衰するが、 $z_{out}/D=5$ の管中心部には、外壁側の値と比較すると小さいが比較的高い値がまだ存在し、流れが回復した状態に得られるであろう同心円状等値線分布とはかけ離れている。

図8は両結果のせん断応力 $\overline{u_\phi u_r}$ を比較したものである。 $\phi=0^\circ$ では同心円状分布が内壁に寄った分布を示すが計算は内壁側の管壁面近傍で高い値を示し実験と異なる。 $\phi=30^\circ$ においては零ラインを挟んで異符号領域を形成する。この特徴的な現象は、 $\phi=60, 90^\circ$ でも認められるが計算は上下対称軸近傍に2本めの零ラインを予測しこの断面では実験と異なる。しかし、この2本めの零ラインは下流直管の $z_{out}/D=1$ では消滅、 $z_{out}/D=5$ では再度上下対称軸近傍に現れ両結果

Exp.by Sudou et al.

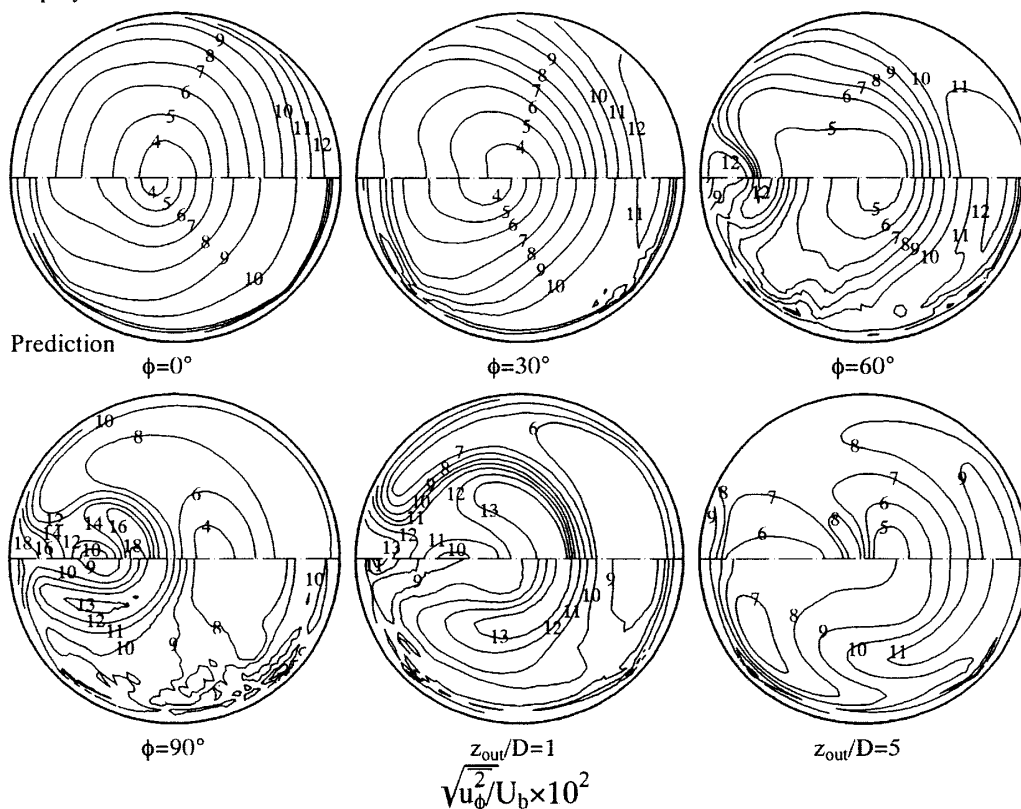
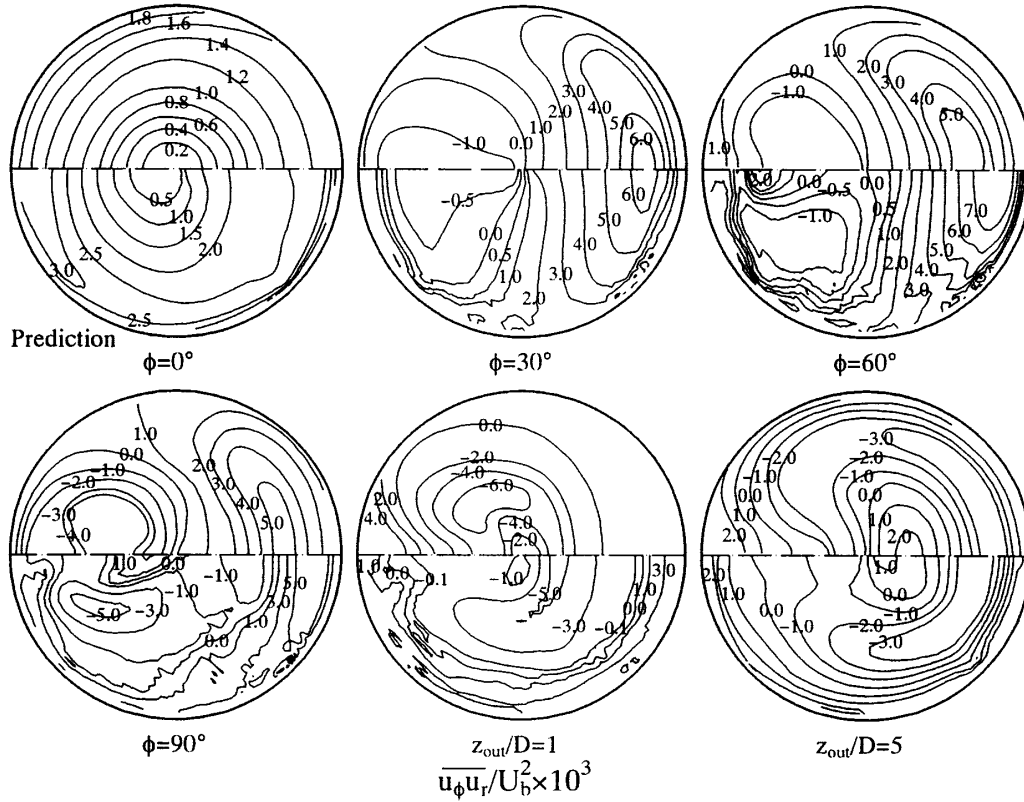
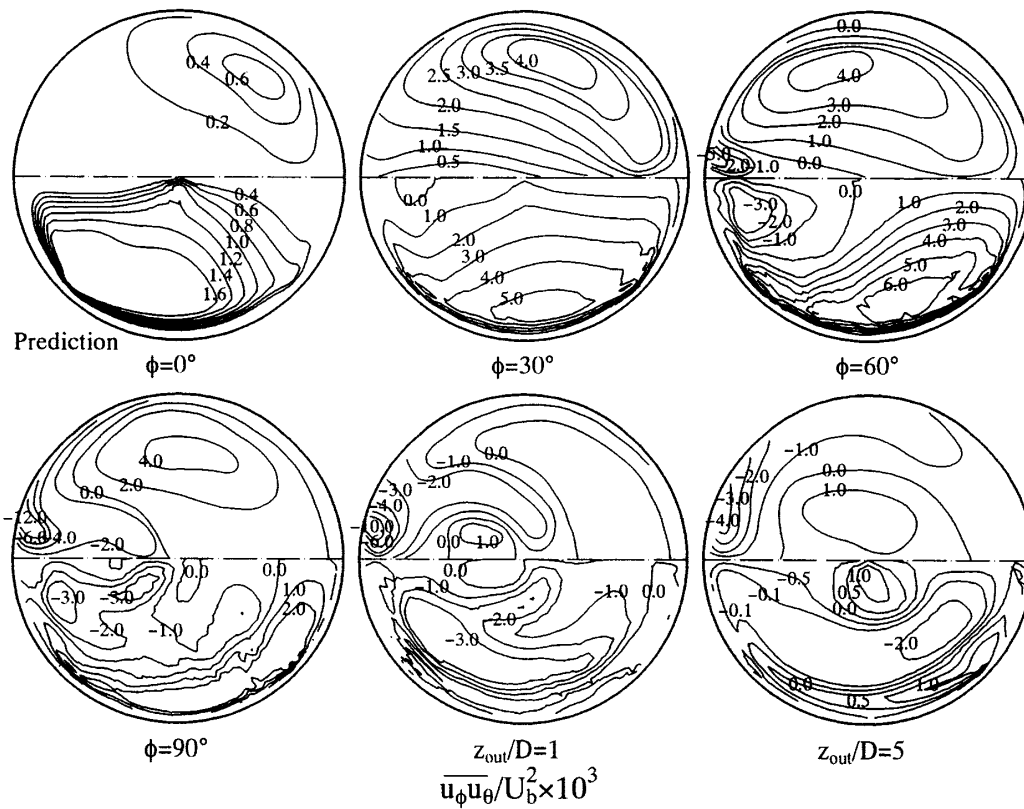


Fig. 7 Comparison of streamwise velocity fluctuation

Exp.by Sudou et al.

Fig. 8 Comparison of shear stress $\overline{u_\phi u_r}$

Exp.by Sudou et al.

Fig. 9 Comparison of shear stress $\overline{u_\phi u_\theta}$

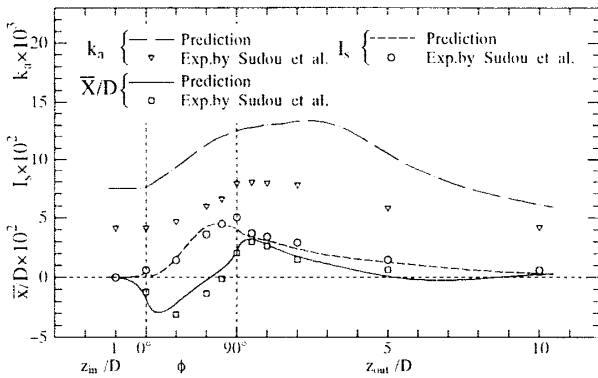


Fig. 10 Comparison of mean-value of turbulent energy, secondary flow and deviation for streamwise velocity from the tube center

にて共通している。

図9はせん断応力 $u_\phi u_\theta$ を比較した結果である。 $\phi = 0^\circ$ にて計算は実験値を大きく見積もっている。また曲がり管に流入すると内壁にて負の領域を形成することは共通しているが、実験ではこの領域が下流直管においても顕著に認められるのに対して計算では認められず実験分布とは異なっている。

以上示したように計算値は実験値を細部にわたり予測するには至らなかったが、こうした差異要因として計算側からはレイノルズ輸送方程式中の対流、拡散項を代数式にてモデル化した点を指摘できる。

4.3 断面平均量比較 須藤ら⁽⁶⁾より定義された主流の偏り $\bar{X}/D$ 、二次流れ、乱流エネルギーの断面内平均量 I_s , k_a について比較した結果を図10に示す。各値は以下の式にて示される。

$$\frac{\bar{X}}{D} = \frac{8}{\pi D^2 U_b} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{D/2} \frac{r \sin \theta}{D} U_\phi r dr d\theta \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$I_s = \frac{8}{\pi D^2 U_b^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{D/2} (U_\theta^2 + U_r^2) r dr d\theta \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$k_a = \frac{8}{\pi D^2 U_b^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{D/2} \frac{1}{2} (\overline{u_\phi^2} + \overline{u_\theta^2} + \overline{u_r^2}) r dr d\theta \quad \dots\dots\dots (5)$$

実験結果より主流の偏りは曲がり入口で内壁側に寄った後、外壁に移行し下流直管において最大値を示すこと、二次流れは曲がり管にて増加し下流直管に流入すると減少するが $z_{out}/D=10$ でも存在することなどを特徴的な点として指摘できるが、計算もその現象をと

らえ、同時に定量的にも予測している。しかし乱流エネルギーに関しては定性的な特徴はとらえているものの定量的には差が認められた。

5. 結 論

90° 曲がり円管内乱流場を対象に代数応力モデル、境界適合座標を用い数値解析を行った。解析結果は須藤ら⁽⁶⁾の実験と比較して以下の結論を得た。

(1) 主流方向平均速度は曲がり管の内壁近傍で低速領域を形成するが、本解析手法はこうした特徴的現象を定量的にも比較的良好に予測した。

(2) 本解析手法は、二次流れベクトルの発達挙動を比較的良好に予測した。同時に二次流れは曲がり管出口近傍の内壁側にて加速されることを予測した。

(3) 主流方向変動速度に関して、本解析手法は値を小さく予測するが、内壁にて最大値を示すなどの特徴は再現した。

(4) せん断応力 $\overline{u_\phi u_r}$ の等値線は多少差はあるものの比較的那特徴を予測しているがせん断応力 $\overline{u_\phi u_\theta}$ に関しては差が認められた。

文 献

- (1) Rowe, M., *J. Fluid Mech.*, **43** (1970), 771-783.
- (2) Enayet, M. M., Gibson, M. M. and Taylor, A. M. K. P., *Int. J. Heat Fluid Flow*, **3-4** (1982), 213-219.
- (3) Azzola, J., Humphrey, J. A. C., Iacovides, H. and Launder, B. E., *Trans. ASME, J. Fluids Eng.*, **108** (1986), 214-221.
- (4) Azzola, J. and Humphrey, J. A. C., *Univ. of California, Rep.*, LBL-17681 (1984).
- (5) 青山善行・森崎秀行・二神浩二, 第30回日本伝熱シンポジウム講演論文集, II (1993-5), 520-522.
- (6) 須藤浩二・高見敏弘・矢野賢司, 機論, **58-548**, B (1992), 1015-1021.
- (7) Patanker, S. V., Pratap, S. V. and Spalding, D. B., *J. Fluid Mech.*, **67** (1975), 583-595.
- (8) 杉山均・秋山光庸・菊池裕, 機論, **61-585**, B (1995), 1707-1713.
- (9) 須藤浩二・高見敏弘, 機論, **54-506**, B (1988), 2755-2761.
- (10) 青山善行・土方邦夫・二神浩二, 機論, **56-528**, B (1990), 2300-2308.
- (11) Boersma, B. J. and Nieuwstadt F. T. M., *Trans. ASME, J. Fluids Eng.*, **118** (1996), 248-254.
- (12) 杉山均・秋山光庸・芹沢寿行, 機論, **56-531**, B (1990), 3328-3335.
- (13) Rodi, W., *Z. Angew. Math. Mech.*, **56** (1976), 219-221.
- (14) 杉山均・秋山光庸・平田賢・上野智志, 機論, **57-539**, B (1991), 2269-2276.
- (15) 杉山均・秋山光庸・八鍬喜規・若山英樹, 機論, **60-571**, B (1994), 842-848.