

## 粘弾性流体における二次流れの数値予測\*

杉山 均<sup>\*1</sup>, 秋山光庸<sup>\*1</sup>, 小出律文<sup>\*2</sup>Numerical Analysis of Secondary Flow for Viscoelastic Fluid  
Through Elliptical DuctHitoshi SUGIYAMA<sup>\*3</sup>, Mitsunobu AKIYAMA and Norifumi KOIDE<sup>\*3</sup> Utsunomiya University Dept. of Energy and Environmental Science  
7-1-2 Yoto, Utsunomiya, Tochigi, 321-8585 Japan

The flow behavior of viscoelastic non-Newtonian fluid in circular and non-circular ducts is of special engineering interest. Therefore a numerical analysis has been performed for viscoelastic non-Newtonian fluid in elliptical duct. Special attention is paid for the generation of secondary flow for laminar flow by using two kinds of constitutive equation, i.e., Maxwell and Reiner-Rivlin models. As for Maxwell model, body force caused by the elastic stress is approximated by linear source term. In calculation, viscosity was represented by adopting power-law fluid and boundary-fitted coordinate system was introduced as the method of coordinate transformation. The calculated results of two models show the secondary flow in elliptical duct as the same as theoretically analyzed by Green and Rivlin. Adding to the prediction of secondary flow, the generation mechanism of secondary flow has been argued by evaluating the production terms of the transport equation for streamwise vorticity. As a result of this examination, it was found that the term of viscous diffusion and the term containing second normal stress difference played an important role in producing the secondary flow near the wall. At the same time, it is interested phenomenon that the circular direction of secondary flow for viscoelastic fluid is opposite sign to that of secondary flow for Newtonian turbulent flow. As its cause, the present study clarified that the term containing second normal stress difference of viscoelastic fluid is the same type equation for that of turbulence, while the sign of its term for viscoelastic fluid is opposite to that for turbulent flow.

**Key Words:** Numerical Analysis, Non-Newtonian Fluid, Viscoelastic Fluid, Secondary Flow, Constitutive Equation, Elliptical Duct, Boundary-Fitted Coordinate System

## 1. 緒 言

非ニュートン流体は機械、化学、生体、食品と広範な分野にて活用される重要な流体であり、機械工学にとどまることなく多数の研究が報告されている<sup>(1)</sup>。また、非ニュートン流体にはワイセンベルグ効果、パラス効果、えい(曳)糸性などニュートン流体には見られないいくつかの興味ある現象が報告されている。こうした特徴的現象の一つに非円形断面を有する直線管路に粘弾性流体が流れる際に観察される二次流れの存在がある。

一般に層流場のニュートン流体ではこうした二次流れは生成されないが、ニュートン流体の乱流場における非円形断面直線管路内流れにおいては、乱れの非等方性より断面平均速度の2~3%の第2種二次流れが生成されることが多くの研究で報告されている<sup>(2)</sup>。また、この第2種二次流れは断面内のコーナに向かって流れることからコーナ流れとも呼ばれ、正方形断面管

路ではその1/4断面にて中心からコーナに向かう一対の渦が生成されることになる<sup>(3)</sup>。これに対し非ニュートン流体の層流場においては、ニュートン流体の第2種二次流れとは二次流れパターンは同一ではあるが、循環方向がまったく逆の二次流れが生成され、非常に興味深い現象を提示している。

この非ニュートン流体における二次流れの研究は、Green-Rivlin<sup>(4)</sup>が摂動法を用いて粘弾性流体の円断面を有する直線管路にて、二次流れが円断面の4象限に生成されることを解析して以来、多くの関心を集め研究結果が報告されるようになった。実験的にも Townsend-Walters-Waterhouse<sup>(5)</sup>, Dodson-Townsend-Walter<sup>(6)</sup>は正方形断面管路にて、堀川・森・三村<sup>(7)</sup>は偏心二重円管路にてこの二次流れの存在を染料を用いた可視化手法にて報告している。しかし、二次流れ強度は非常に小さく定量的な測定結果はまだ報告されていない。

一方、数値解析においてこの二次流れを再現するには粘弾性流体の構成方程式を解くことが必要となる。前田<sup>(8)</sup>は Maxwell モデルに完全発達流、断面方向速度は主流に比べて小さいことを仮定し Maxwell モデルを線形化し正方形断面内管路で二次流れが生成され

\* 原稿受付 1999年2月5日。

<sup>\*1</sup> 正員, 宇都宮大学大学院工学研究科 (〒321-8585 宇都宮市陽東7-1-2)。<sup>\*2</sup> 宇都宮大学大学院。

E-mail: sugiyama@cc.utsunomiya-u.ac.jp

ることを報告している。これに対し Gao-Hartnett<sup>(9)</sup>は、粘性変化にべき乗則モデルを用い、Reiner<sup>(10)</sup>、Rivlin<sup>(11)</sup>が示した構成方程式を併用し前田と同様、正方形断面管路における二次流れの生成を数値解析にて予測した。彼らも Reiner-Rivlin モデルを前田と同様な仮定の下に構成方程式を簡略化しているが、べき乗則モデルを導入した点で異なる。このときべき指数は 1 以下の範囲で計算を行っている。

以上の数値解析は正方形断面を対象としたものであり、だ円断面管路については Green-Rivlin<sup>(4)</sup>が理論解析結果を示すのみで数値解析結果は報告されていない。このだ円断面管路においては、ニュートン流体の乱流場において第 2 種二次流れの実験、計算結果が報告されている<sup>(12)</sup>。粘弹性流体の場合、構成方程式がこうした第 2 種二次流れと循環方向が逆の二次流れを再現し得るのかどうかは構成方程式の有用性、妥当性を検討するうえで重要である。同時にニュートン流体の乱流場、および粘弹性流体で互いに循環方向が異なる二次流れが形成される理由について乱流モデル、構成方程式から検討することも有意義なことである。

そこで本研究では前田により線形化された Maxwell モデル、Reiner-Rivlin モデルを用い、だ円断面管路を流れる粘弹性流体の二次流れの数値解析を行う。解析結果より各モデルの特徴を明らかにするとともに、各モデルには粘性の影響を考慮するためべき乗則モデルを導入し、べき指数変化による二次流れパターン変化についても検討する。さらに、使用した構成方程式から二次流れ生成機構について新たな知見を得ることを試みる。計算に際しては助走区間路における二次流れの発達挙動についても検討を行う意味から三次元管路として計算を行い、境界条件の設定が容易な境界適合座標系を用いて計算を行う。

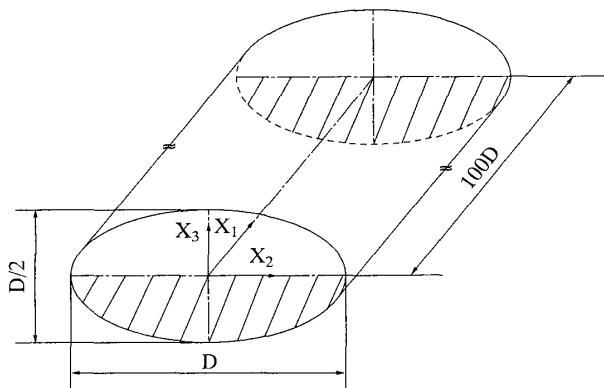


Fig. 1 Elliptical duct and definition of coordinate system

## 2. おもな記号

- $D$ : 代表長さ(長軸長さ)  
 $D_{ij}$ : 変形速度テンソル  
 $k$ : 乱流エネルギー  
 $n$ : べき指数  
 $P$ : 時間平均圧力  
 $Re$ : レイノルズ数  $= \rho U_b^{(2-n)} D / \mu_0$   
 $U_i$ :  $X_i$  軸方向時間平均速度  
 $U_b$ : 断面内の主流方向平均速度  
 $\overline{u_i u_j}$ : レイノルズ応力  
 $X_i$ :  $i$  軸方向座標  
 $\alpha$ : 第 2 法線応力差係数  
 $\delta_{ij}$ : クロネッカのデルタ  
 $\varepsilon$ : 乱流散逸  
 $\lambda$ : 緩和時間  
 $\mu$ : 粘性係数  
 $\mu_0$ : 第 1 ニュートン領域の粘性係数  
 $\nu$ : 動粘性係数  $= \mu / \rho$   
 $\nu_t$ : 渦動粘性係数  
 $\rho$ : 密度  
 $\sigma_{ij}$ : 応力テンソル成分  
 $\omega_{ij}$ : 回転速度テンソル  
 $Q_l$ : 主流方向渦度

## 3. 解析手法

**3・1 計算対象空間** 本解析で計算対象としただ円断面管路の概略図を座標系とともに図 1 に示す。管路断面はだ円形状をし長短軸比は 2 である。座標系は主流方向を  $X_1$  軸、水平、鉛直方向をそれぞれ  $X_2$ ,  $X_3$  軸とした。計算に際しては図 1 中の斜線部に示すように 1/2 断面にて計算を行った。

**3・2 構成方程式** 本研究では粘弹性流体に対し前田<sup>(8)</sup>により線形化された Maxwell モデル、Reiner-Rivlin モデルの 2 種類の構成方程式を用いる。弾性変形、粘性流動を直列に結合した Maxwell モデルは一般に、上対流微分、下対流微分、共回転微分を用いたモデルに理論的に分類されるが、本解析では上対流微分を用い解析した。以下にそのモデル式を示す。

$$\sigma_{ij} + \lambda \overset{\nabla}{\sigma} = 2\mu D_{ij} \quad \dots \dots \dots (1)$$

上式第 2 項は上対流微分であり通常 Oldroyd 微分、次に示す Jaumann 微分が用いられる。

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} = \frac{D\sigma_{ij}}{Dt} + \omega_{kj}\sigma_{ik} - \sigma_{kj}\omega_{ik} \quad \dots \dots \dots (2)$$

式(1), (2)中の  $D_{ij}$ ,  $\omega_{ij}$  は変形速度テンソルと回転速度テンソルであり以下のように定義される。

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right] \quad \dots \dots \dots \quad (3)$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial U_i}{\partial X_j} - \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right] \quad \dots \dots \dots \quad (4)$$

前田<sup>(8)</sup>は式(2)の対流項に関しては、断面方向速度は小さく完全発達流を仮定し省略し第2項に関しては、その対角成分のみを以下のようにモデル化している。対角成分以外の応力テンソルは零である。

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{11} = 2\lambda(\sigma_{12}\omega_{21} + \sigma_{13}\omega_{31}) \quad \dots \dots \dots \quad (5)$$

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{22} = 2\lambda\sigma_{21}\omega_{12}, \quad \overset{\nabla}{\sigma}_{33} = 2\lambda\sigma_{31}\omega_{13} \quad \dots \dots \dots \quad (6)$$

上式の回転速度テンソル  $\omega_{ij}$  に含まれる断面方向速度の速度こう配は小さいものとして省略し、また式(1), (2)から明らかなように応力  $\sigma_{ij}$  は陰的な形で示されているが、計算に際しては上対流微分項は計算1回前の既知な速度より算出する。

一方、Reiner-Rivlin モデルは以下のように示される。

$$\sigma_{ij} = 2\mu D_{ij} + \alpha D_{ik} D_{kj} \quad \dots \dots \dots \quad (7)$$

式中  $\alpha$  は第2法線応力差係数と定義される。前述の線形化 Maxwell モデルと類似の式を有するが、Maxwell モデルの場合式(5), (6)より粘性の影響が含まれることになるが、式(7)第2項には粘性の影響は加味されない。

また、式(7)の第2項に関しては、二次流れは微小であることを考慮し本解析では以下のように各応力をモデル化した。

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2\mu D_{11} \\ &+ \alpha \left\{ \left[ \frac{\partial U_1}{\partial X_2} + \frac{\partial U_2}{\partial X_1} \right]^2 + \left[ \frac{\partial U_1}{\partial X_3} + \frac{\partial U_3}{\partial X_1} \right]^2 \right. \\ &\left. + 4 \left[ \frac{\partial U_1}{\partial X_1} \right]^2 \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (8) \end{aligned}$$

$$\sigma_{12} = 2\mu D_{12} + 2\alpha \left[ \frac{\partial U_2}{\partial X_1} + \frac{\partial U_1}{\partial X_2} \right] \frac{\partial U_1}{\partial X_1} \quad \dots \dots \dots \quad (9)$$

$$\sigma_{13} = 2\mu D_{13} + 2\alpha \left[ \frac{\partial U_3}{\partial X_1} + \frac{\partial U_1}{\partial X_3} \right] \frac{\partial U_1}{\partial X_1} \quad \dots \dots \dots \quad (10)$$

$$\sigma_{22} = 2\mu D_{22} + \alpha \left[ \frac{\partial U_2}{\partial X_1} + \frac{\partial U_1}{\partial X_2} \right]^2 \quad \dots \dots \dots \quad (11)$$

$$\sigma_{23} = 2\mu D_{23} + \alpha \left[ \frac{\partial U_2}{\partial X_1} + \frac{\partial U_1}{\partial X_2} \right] \left[ \frac{\partial U_3}{\partial X_1} + \frac{\partial U_1}{\partial X_3} \right] \quad \dots \dots \dots \quad (12)$$

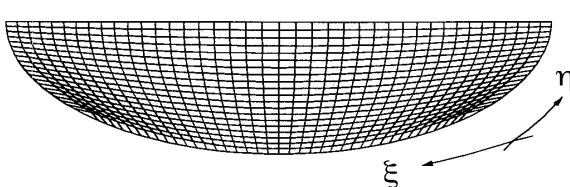


Fig. 2 Computational mesh

$$\sigma_{33} = 2\mu D_{33} + \alpha \left[ \frac{\partial U_3}{\partial X_1} + \frac{\partial U_1}{\partial X_3} \right]^2 \quad \dots \dots \dots \quad (13)$$

粘性変化に関してはべき乗則モデルを上記の2種類の構成方程式に導入する。粘性係数は三次元テンソル表示にて以下のように示される。

$$\mu = \mu_0 \left[ \frac{|\gamma_{ij}\gamma_{ji}|}{2} \right]^{(n-1)/2} \quad \dots \dots \dots \quad (14)$$

ここで

$$\gamma_{ij} = \left[ \frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right] \quad \dots \dots \dots \quad (15)$$

**3・3 数値解析** 本解析対象のような直交座標系で境界条件の設定が難しい流れ場に対しては境界適合座標系を適用した。境界適合座標系による計算手法は、物理平面上の解析領域を計算領域へ座標変換し計算平面上で支配方程式を解く手法である。境界条件の設定、方程式の離散化が容易な反面、変換された支配方程式が複雑になるという特徴をもつ。支配方程式の計算平面上への変換は次の数学定理より変換される。

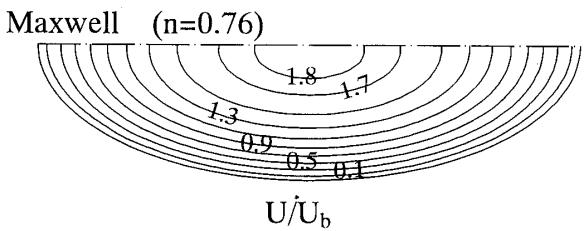


Fig. 3 Calculated results of Maxwell model

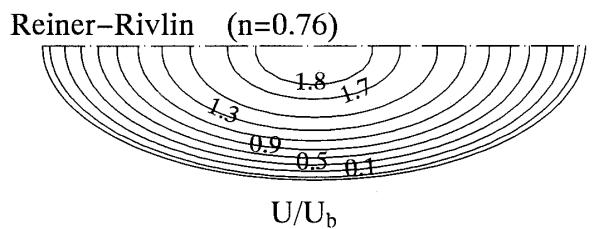


Fig. 4 Calculated results of Reiner-Rivlin model

$$\frac{\partial}{\partial X_i} = \frac{\partial \xi}{\partial X_i} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial X_i} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \zeta}{\partial X_i} \frac{\partial}{\partial \zeta} \quad \dots \dots (16)$$

上式中  $\xi, \eta, \zeta$  は、変換された計算平面での座標軸を示している。

計算に際しては、系の対称性を考慮し  $1/2$  断面を計算対象とした。図 2 にだ円断面の格子配列を示す。計算格子点は断面内で  $41 \times 21$ 、流れ方向に 65 の総数 55 956 点の格子を配列した。管路全長はだ円長軸の 100 倍を設けてある。図 2 中の  $\eta, \xi$  は計算平面上の座標系を示し格子に沿う座標を示している。計算に際しレイノルズ数は代表速度に断面内平均速度を、代表長さに長軸長さを取って  $Re=100$  として計算を行った。また、べき指数は 0.76 から 1.24 の範囲で変化させ、緩和時間は  $\lambda=0.9$ 、第 2 法線応力差係数は  $\alpha=1.0 \times 10^{-4}$  とした。

流入境界条件に関しては主流方向速度に一様流を与え出口直管路部の境界条件にはノイマン条件を課した。式の離散化は有限差分近似により行い各計算諸量の格子点配置は Regular Grid 法によった。支配方程式中の対流項差分近似は QUICK を、それ以外の項に関しては中心差分を使用した。また、解析に際しては三次元だ円形方程式として解析を行った。

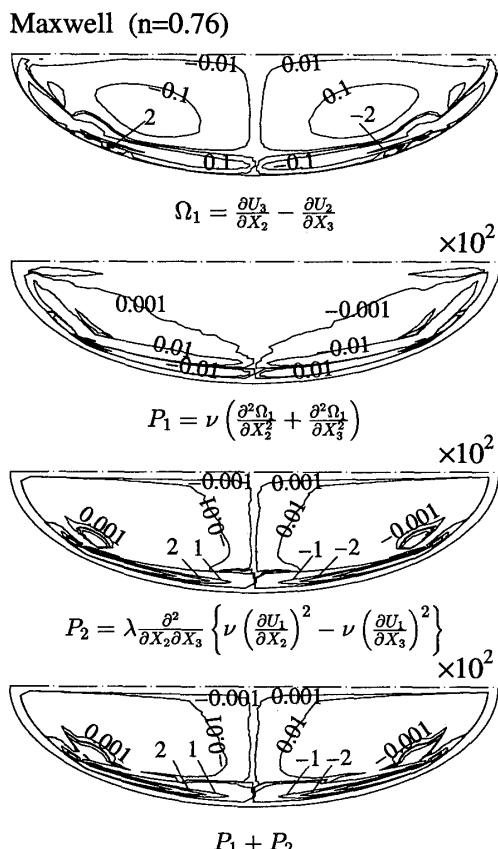


Fig. 5 Vorticity and production terms of Maxwell model

#### 4. 結果と考察

**4・1 粘弹性流体の二次流れ** 図 3 に Maxwell モデル、図 4 に Reiner-Rivlin モデルの完全発達領域における主流方向速度の等值線分布および二次流れ分布を示す。このときのべき指数は  $n=0.76$  である。完全発達領域に相当する  $X_1=98D$  にて、両結果ともに長軸に沿って壁面から中心部に向かい、中心部から下方壁面に下降し、その後壁面に沿って流れる二次流れが認められる。また、その強度は断面平均速度の数%と微弱である。こうした二次流れ分布は Green-Rivlin<sup>(4)</sup> が摂動法を用いて解析的に予測した二次流れ分布と符合する。

こうした二次流れ生成機構は興味あるところであるが、この二次流れ生成について主流方向渦度  $\Omega_1$  の輸送方程式を用いて検討する。構成方程式には Maxwell モデルを用い完全発達領域における主流方向渦

Reiner-Rivlin ( $n=0.76$ )

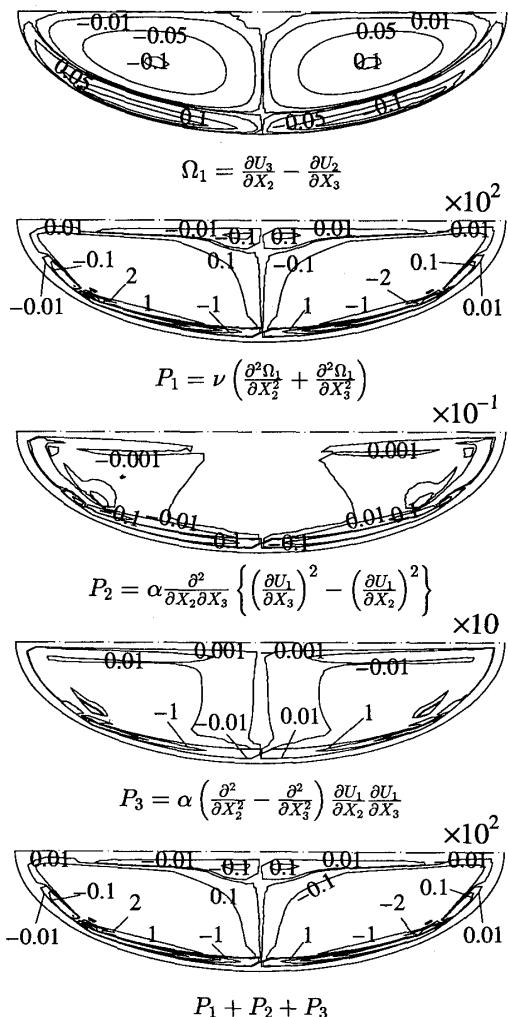


Fig. 6 Vorticity and production terms of Reiner-Rivlin model

度輸送方程式を運動方程式より導出すると以下のように示される。座標系は図1に準じた。

$$\begin{aligned} & U_2 \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_2} + U_3 \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_3} \\ &= \nu \left[ \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial X_3^2} \right] \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial X_2 \partial X_3} \left\{ \nu \left[ \frac{\partial U_2}{\partial X_1} + \frac{\partial U_1}{\partial X_2} \right] \frac{\partial U_1}{\partial X_2} \right. \\ &\quad \left. - \nu \left[ \frac{\partial U_3}{\partial X_1} + \frac{\partial U_1}{\partial X_3} \right] \frac{\partial U_1}{\partial X_3} \right\} \quad \dots \dots \dots (17) \end{aligned}$$

ここで主流方向渦度は以下のように定義される。

$$\Omega_1 = \frac{\partial U_3}{\partial X_2} - \frac{\partial U_2}{\partial X_3} \quad \dots \dots \dots (18)$$

式(17)にて右辺第1項、第2項は主流方向渦度の生成項であり二次流れに生成に寄与する。第1項は粘性拡散項であり、第2項は第2法線応力差による生成項と解釈される。第2項には断面方向速度こう配が含まれるが、この項は完全発達領域では零となるため右辺第2項は以下のように簡略化されて示される。

$$\lambda \frac{\partial^2}{\partial X_2 \partial X_3} \left\{ \nu \left[ \frac{\partial U_1}{\partial X_2} \right]^2 - \nu \left[ \frac{\partial U_1}{\partial X_3} \right]^2 \right\} \quad \dots \dots \dots (19)$$

同様に Reiner-Rivlin モデルを用い主流方向渦度輸送方程式を導出するとせん断応力  $\sigma_{23}$  が零でないため第2法線応力差による生成項以外にせん断応力  $\sigma_{23}$  による生成項が加算され以下のように示される。対流項、粘性拡散項は式(17)に示す式と同一である。

$$\begin{aligned} & \alpha \frac{\partial^2}{\partial X_2 \partial X_3} \left[ \left[ \frac{\partial U_1}{\partial X_3} \right]^2 - \left[ \frac{\partial U_1}{\partial X_2} \right]^2 \right] \\ &+ \alpha \left[ \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial X_3^2} \right] \frac{\partial U_1}{\partial X_2} \frac{\partial U_1}{\partial X_3} \quad \dots \dots \dots (20) \end{aligned}$$

Maxwell モデル、Reiner-Rivlin モデルの計算結果から渦度、渦度輸送方程式の生成項成分を式(19)、(20)より算出した結果をそれぞれ図5、6に示す。

両モデルとも渦度は壁面に沿って絶対値の大きな領域が存在し二次流れの生成が壁面近傍で行われることを示している。この二次流れ生成に寄与する生成項は両モデルでは大きく異なる。図5から理解されるように Maxwell モデルでは式(17)右辺第1項( $P_1$ )に比較し第2項( $P_2$ )のほうが広い領域で大きな絶対値を占める。したがって両項を加算した分布( $P_1+P_2$ )は第2項の分布と類似し第2項が支配的であることが理解できる。

一方、Reiner-Rivlin モデルでは式(17)右辺第1項( $P_1$ )が他の項に比較し大きな値を有し二次流れ生成に支配的である。また、式(20)に示すせん断応力  $\sigma_{23}$  による生成項( $P_3$ )も第2法線応力差による生成項( $P_2$ )より壁面近傍で高い値を示し二次流れ生成に影響力を有する。Reiner-Rivlin モデルでは第2法線応

力差による生成項( $P_2$ )は小さく、粘性拡散項による生成( $P_1$ )が支配的で、べき乗則モデルのべき指数に大きく影響されることを示唆している。粘性拡散項が第2項より大きな値を有することについては、第2法線応力差係数  $\alpha$  を  $1.0 \times 10^{-4}$  と小さく取ったことにも起因すると推測されるが、計算の際に第2法線応力差係数  $\alpha$  を大きく取ると収束解が得られず、本解析ではこの条件で計算を行った。

以上の計算結果が示すように二次流れ分布のみを比較すると両モデルとも妥当な結果を示し二次流れ生成に関し構成方程式も類似であるように思われるがちであるが、渦度輸送方程式から考察すると二次流れは異なる生成項により生成され、生成機構は両モデルで大きく異なることが理解される。一般に、粘弹性流体における二次流れ生成が第2法線応力差によるものであることが指摘されているが、この観点からすると Maxwell モデルのほうがより実際の流れを再現したモデルであると推察される。

杉山ら<sup>(12)</sup>はニュートン流体の乱流場にてだ円断面直線管路に生成される第2種二次流れ分布を実験、計算の両解析結果から報告している。第2種二次流れは乱れの非等方性により生成される二次流れであり、圧力こう配により生成される第1種二次流れ、あるいは前述の第2法線応力差による二次流れとは区別される。その二次流れ分布と図3、4の計算結果と比較するとその循環方向はまったく逆方向を示す。杉山ら<sup>(12)</sup>は代数応力モデルを用いた乱流計算も行っている。そこで、非ニュートン流体の構成方程式と乱流モデルにてどのような点が異なるのか明らかにし、二次流れの循環方向が異なる要因について検討する。

乱流場における運動量輸送方程式から完全発達領域における主流方向渦度輸送方程式を導出すると以下のように示される。

$$\begin{aligned} & U_2 \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_2} + U_3 \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_3} \\ &= \nu \left[ \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial X_3^2} \right] \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial X_2 \partial X_3} (\overline{U_2^2} - \overline{U_3^2}) \\ &+ \left[ \frac{\partial^2}{\partial X_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} \right] \frac{\overline{U_2 U_3}}{\overline{U_2^2}} \quad \dots \dots \dots (21) \end{aligned}$$

右辺第1項から第3項が主流方向渦度の生成項となるが乱流の場合主要項は第2、3項である。さらに第2、3項に含まれるレイノルズ応力を杉山ら<sup>(13)</sup>の代数応力モデルから導出すると以下のように示される。導出の詳細は別報に報告した<sup>(14)</sup>。

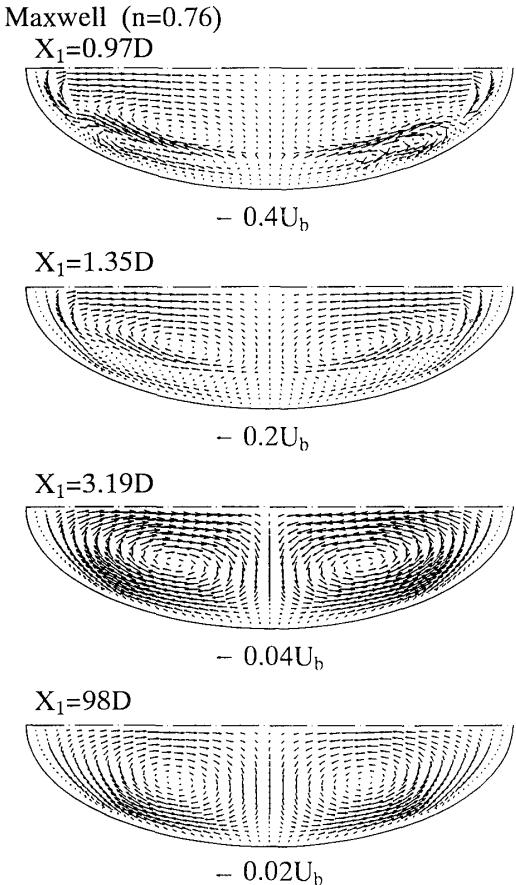


Fig. 7 Development of secondary flow for Maxwell model

$$\bar{u}_2^2 - \bar{u}_3^2 = c \frac{k}{\varepsilon} \left[ \frac{\partial U_1}{\partial X_2} u_1 u_2 - \frac{\partial U_1}{\partial X_3} u_1 u_3 \right] \dots \dots \dots (22)$$

$$u_2 u_3 = 2c \frac{k}{\varepsilon} \left[ \frac{\partial U_1}{\partial X_2} u_1 u_3 + \frac{\partial U_1}{\partial X_3} u_1 u_2 \right] \dots \dots \dots (23)$$

式中に含まれる  $c$  は正の値をもつモデル定数である。また式中に含まれるせん断レイノルズ応力成分については問題点を明確にする意味から以下に示す渦動粘性係数の式を用いて書き改める。

$$-\bar{u}_i \bar{u}_j = \nu_t \left[ \frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right] - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \dots \dots \dots (24)$$

これより式(21)右辺第2, 3項は以下のように主流方向速度こう配にて表現される。ただし完全発達流であること、断面方向速度こう配は小さいものとして省略し、導出した。

$$c \frac{\partial^2}{\partial X_2 \partial X_3} \left\{ -\nu_t \frac{k}{\varepsilon} \left[ \frac{\partial U_1}{\partial X_2} \right]^2 + \nu_t \frac{k}{\varepsilon} \left[ \frac{\partial U_1}{\partial X_3} \right]^2 \right\} - 4c \left[ \frac{\partial^2}{\partial X_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} \right] \frac{k}{\varepsilon} \nu_t \frac{\partial U_1}{\partial X_2} \frac{\partial U_1}{\partial X_3} \dots \dots \dots (25)$$

以上の結果から式(19)と式(25)第1項とを比較すると、式は主流方向速度こう配から構成され両式の式形は同一で符号が逆であることが理解できる。両式とも二次流れ生成に大きく寄与する項であることも同時に

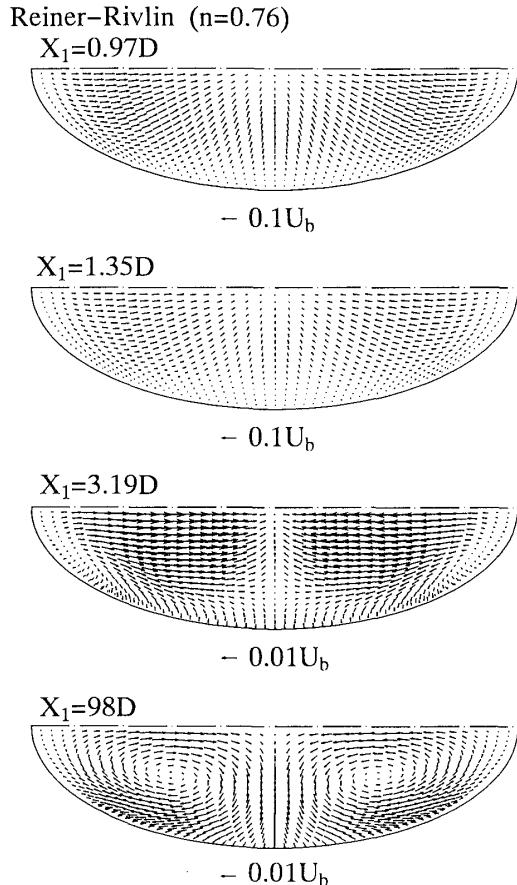


Fig. 8 Development of secondary flow for Reiner-Rivlin model

考慮すると粘弾性流体の二次流れ、乱流の第2種二次流れが逆回転となるのは、式(17)の右辺第2項と式(21)の右辺第2項とが二次流れ生成に関し互いに逆の効果に作用するためとモデルのうえから解釈できる。現象論的には第2種二次流れが乱れの非等方性により生成される流れであるのに対し、非ニュートン流体の二次流れは流体の弹性変化が非等方的に生成され、その非等方性が両者では逆に作用する結果と解釈される。

**4・2 助走区間における二次流れの発達** 図7, 8にそれぞれ Maxwell, Reiner-Rivlin モデルで計算した代表的な位置における完全発達領域までの二次流れ分布の発達挙動分布を示す。Maxwell モデルの場合  $X_1=3.19D$  程度まで二次流れは大きく変化し、 $X_1=3.19D$  で完全発達領域に相当する  $X_1=98D$  における二次流れパターンとほぼ同一の二次流れパターンを形成する。その後二次流れは、その二次流れパターンは変化することなく二次流れ強度を減衰しながら完全発達領域の二次流れへと発達していく。

一方、Reiner-Rivlin モデルも発達初期にて断面平均速度の 10%程度の比較的強度の大きな二次流れを

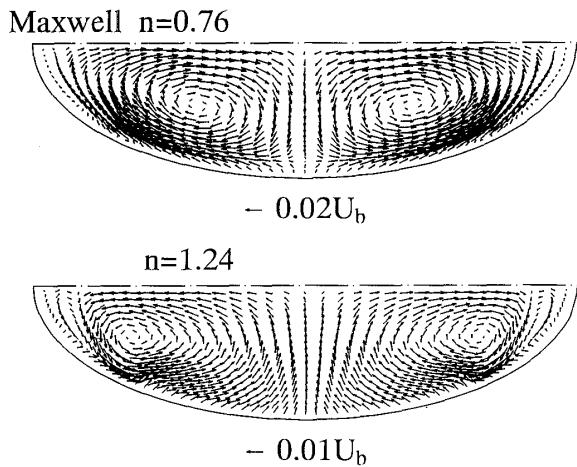


Fig. 9 Effect of power law index for Maxwell model

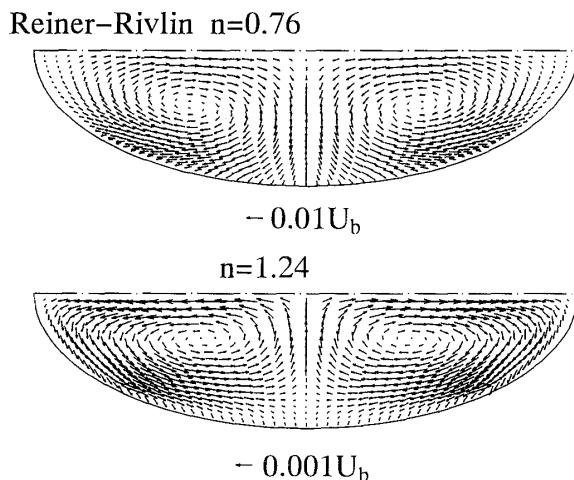


Fig. 10 Effect of power law index for Reiner-Rivlin model

形成することは共通しているが、その二次流れパターンは大きく異なる。Maxwell モデルが発達初期にて二次流れによる渦対を形成するのに対して Reiner-Rivlin モデルは壁面から管路中心部に向かう二次流れを形成し渦対を形成することはない。Maxwell モデルでは管内部に生成される二次流れによる循環流と回転が異なる循環流が壁面近傍に生成され、その後、壁面側の循環流は消滅し、管路内部側の循環流が管路全体に形成される。これに対して Reiner-Rivlin モデルは、管路中心部に向かう一方向の二次流れが形成され、その後長軸側に寄った壁面近くで循環流が形成され徐々に発達し管路断面全体を占めるように一对の渦対を形成する。

以上のように完全発達領域では両モデルとも、ほぼ同様な二次流れパターンを示すが、助走区間ではその様相は大きく異なりモデルの特徴がより浮き彫りにされる。こうした助走区間での特徴的現象はニュートン流体の層流場、乱流場の流れでは認められず粘弹性流

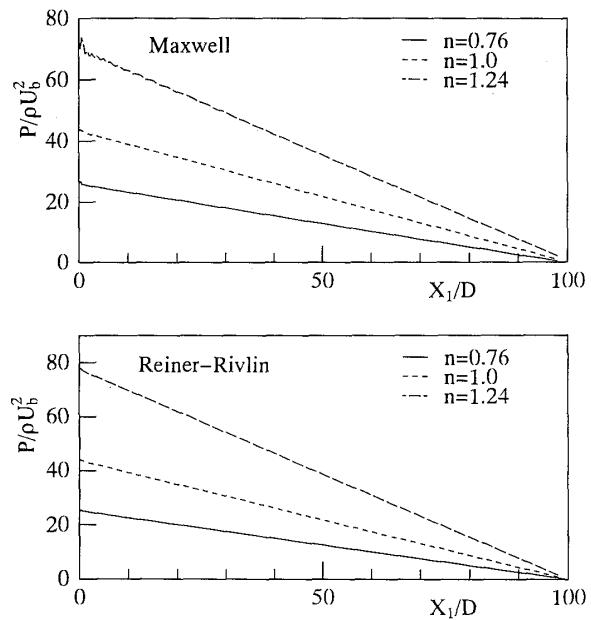


Fig. 11 Influence on pressure development with changing power law index

体に固有の現象と理解できる。いずれがより実際の流れを再現しているのか興味あるところであるが実験による査証が不可欠である。同時に、こうした結果は構成方程式の評価は完全発達領域ばかりではなく、流入領域でも評価することが重要であることを示唆している。

**4・3 べき指数による影響** 粘性が断面内で変化する点は乱流の場合の渦動粘性係数が変化することと共通する現象である。乱流の場合、速度こう配が大きなところで見掛け上の粘性が大きく作用することから、ダイラント性を示す非ニュートン流体、すなわちべき指数  $n$  が 1 より大きな流体においてはニュートン流体の乱流場に類似した現象が現れることが予想される。すなわち、べき指数を 1 より増加していくと、先に予測した二次流れ分布が、乱流と同様な挙動を示し二次流れの循環方向が図 3, 4 とは逆に生成されることが予測される。この点を確認するため、Maxwell モデル、Reiner-Rivlin モデルにてべき指数を 1.24 に変化させ計算を行った。

計算結果を先に示した  $n=0.76$  の結果とともに図 9, 10 に示す。計算結果より明らかに Maxwell モデル、Reiner-Rivlin モデルとも  $n=1.24$  にてニュートン流体に認められる第 2 種二次流れと相似な二次流れが再現され、その循環方向は  $n=0.76$  の場合とは逆である。また、Reiner-Rivlin モデルの場合はその二次流れ強度が小さいことが特徴的である。こうした結果は前述の予測結果と符合するものであり構成方程

式、解析手法の妥当性を示すものと解釈される。

さらに、ダイラタント性を示す非ニュートン流体においては管摩擦抵抗も増加することが予想される。すなわち圧力こう配もべき指数の増加に伴って大きくなることが予測される。この点を確認するため各モデルにおける圧力分布を算出した。圧力計算点は管路中心である。計算結果を図11に示す。計算結果より明らかなようにべき指数の増加に伴って圧力こう配も大きくなり前述の予測と一致する。

このことは二次流れとの相関から現象論的に以下のように説明される。べき指数が1以上の場合に二次流れは長軸に沿って中心から壁面に向かって流れ、このとき比較的高速の流体を壁面近傍に移流する結果、主流方向速度こう配が大きくなり壁面せん断応力を増加させるものと解釈される。もちろん短軸に沿う二次流れは、低速流体を管内部に移流し壁面せん断応力を減少させる方向に作用するが、計算結果が示すように短軸に沿う二次流れ強度は、長軸側と比較すると弱くその移流効果は小さい。壁面全体でのせん断応力の増加、減少の総和を取ると管摩擦による抵抗は増加する方向に作用すると解釈される。

## 5. 結 論

非円形断面管路内を流れる粘弾性流体を対象に、2種類の構成方程式を用いて、この種の流れに特徴的な二次流れ分布の予測を試み以下の結論を得た。

(1) べき指数1以下の粘弾性流体においてMaxwellモデル、Reiner-Rivlinモデルともだ円断面管路の第4象限領域で反時計回りの二次流れを予測した。計算結果は実験、理論解析から予測される結果と符合する。今回計算した条件では二次流れ強度は、断面平均速度の2%程度であった。

(2) 完全発達領域における主流方向渦度輸送方程式から粘性拡散項、第2法線応力差を含む項はとともに二次流れ生成に寄与する。Maxwellモデルの場合には第2法線応力差を含む項が支配的であり、Reiner-Rivlinモデルでは粘性拡散項が支配的で大きな領域で高い値を示す。

(3) だ円断面管路において二次流れ生成の発生領域は壁面近傍である。

(4) 粘弾性流体の二次流れとニュートン流体の乱流場における第2種二次流れとは循環方向がまったく逆な二次流れを形成するが、これは渦度輸送方程式における第2法線応力差を含む項が式的に同形で符号が異なることに起因する。現象論的には運動量交換による乱れの非等方性と速度ひずみによる弾性の非等方性の方向が互いに逆に作用するためと解釈される。

(5) べき指数1以上、すなわちダイラタント性を示す粘弾性流体はニュートン流体の乱流場と類似の流動挙動を示すことが予測されるが、両モデルともべき指数1以上では、乱流における第2種二次流れと類似の二次流れパターンとなることを計算は予測した。

最後に本研究遂行に際し文部省科学研究補助金〔基盤研究(C), No. 10650198〕の援助を得たことを付記し、謝意を表する。

## 文 献

- (1) 富田幸雄、機論、48-432, B (1982), 1423-1430.
- (2) Hurst, K. S. and Rapley, C. W., *Int. J. Heat Mass Transf.*, 34-3 (1991), 739-748.
- (3) Melling, A. and Whitelaw, J. H., *J. Fluid Mech.*, 78 (1976), 289-315.
- (4) Green, A. E. and Rivlin, R. S., *Q. Appl. Math.*, 14 (1956), 299-308.
- (5) Townsend, P., Walters, K. and Waterhouse, W. M., *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 1 (1946), 107-123.
- (6) Dodson, A. G., Townsent, P. and Walter, K., *Comput. Fluids*, 2 (1974), 317-338.
- (7) 堀川明・森教安・三村宣治、機論、47-422, B (1981), 1971-1977.
- (8) 前田武雄、機論、58-556, B (1992), 3531-3535.
- (9) Gao, S. X. and Hartnett, J. P., *Int. Comm. Heat Mass Transf.*, 20 (1993), 197-210.
- (10) Reiner, M., *Am. J. Math.*, 67 (1945), 350-362.
- (11) Rivlin, R. S., *Proc. R. Soc., Ser. A*, 193 (1948), 260-281.
- (12) 杉山均・秋山光庸・若山英樹・渡辺岳男、機論、62-595, B (1996), 1006-1012.
- (13) 杉山均・秋山光庸・芹沢寿行、機論、56-531, B (1990), 3328-3335.
- (14) RC 104 流れ解析プログラム検証研究分科会、研究成果報告書、日本機械学会、(1994), 90-128.