

栃木県黒川における水面変動を伴う 氾濫流動の数値解析

杉山 均*・赤木 英之*・加藤 直人*

Numerical Study of Flooding Mechanism with Moving Free Surface of Kurokawa River in Tochigi Prefecture

Hitoshi SUGIYAMA*, Hideyuki AKAGI* and Naoto KATO*

Abstract

Heavy rain has concentrated in Nasu area in Tochigi prefecture on August 26th, 1998. The maximum precipitation of 607 mm in a day has been recorded at Nasu weather observatory on August 27th. This heavy rain had Kurokawa and Yosasa rivers flood and a great number of houses have suffered from the flooding. In order to prevent threat of natural disaster, it is important to deepen the knowledge of flooding mechanism. From this point of view, numerical analysis has been performed for selected flow region of Kurokawa river with moving free surface by using algebraic Reynolds stress model. The turbulent flow in actual flooding river is one of the complicated turbulent flows, because the flow behavior is influenced by many kinds of forces. Calculated results suggest that flooding is caused by accelerated flow near the free surface which appears at upstream of sharp-turn open channel. This accelerated flow is generated by the reduction of cross sectional area which is induced by the separated flow near the river bed.

キーワード：数値解析，代数応力モデル，乱流，洪水災害，水面変動，黒川

Key words : numerical analysis, algebraic stress model, turbulent, flood disaster, moving free surface, kurokawa river

* 宇都宮大学大学院工学研究科
Graduate School of Engineering, Utsunomiya University

本報告に対する討論は平成22年8月末日まで受け付ける。

1. 緒言

洪水、地震、噴火、津波などに代表される自然災害は、そのスケールの大きさから、生活環境に甚大なる影響を及ぼす。このような自然災害のうち洪水災害は、比較的頻繁に発生し日頃からの注意深い危機管理が必要である。例えば、牛山・寶¹⁾は、1971年から2000年の29年間で、1都府県にて死者・不明者30名以上、もしくは浸水家屋5万棟以上の豪雨災害の事例を報告しているが、それによると25件もの豪雨災害があったことになる。

栃木県においても例外ではなく、1998年8月26日から30日にかけて、前線が北日本に停滞し、福島県南部から栃木県北部にかけて記録的な豪雨に見舞われた。山本ら²⁾は、この時の雨量に関して詳細な調査を行い、気象庁アメダスの那須地域気象観測所における8月26日から31日までの6日間の積算降水量を1,254mmと報告している。また、8月27日に観測された日降水量607mmは、那須高原における1932年からの極値233mm(1974年8月25日)の約2.7倍であり、栃木県下での水害としては未曾有の水害であったことが推察される。この豪雨により、福島県南部の阿武隈川流域、栃木県北部の那珂川と支流の余笹川、黒川の流域では山地斜面の崩壊、河川の氾濫、護岸決壊、河床洗掘と災害が相次いだ。両県では死者・行方不明者が15名に達し家屋の浸水被害は6,000棟を越え、那須地域では過去最大の豪雨災害となった。この時の豪雨災害に関しては、多くの調査結果が報告されている。中川ら³⁾は、被災前後の空中写真をもとに余笹川流域の河道変動について検討している。同時にタンクモデルによる流出解析から得られたハイドログラフを用いて河道変動解析を報告している。館ら⁴⁾は、防災樹林帯の被害軽減効果に着目し、洪水時の堤内地樹林の効果、および洪水流に対する樹林の耐性に関して検討し、樹木自体が流失に耐えうる洪水流の範囲では、樹木が背後家屋の防御効果を発揮することを報告している。さらに、余笹川流域の一部の区間を対象に樹木を抵抗体として氾濫時の流動挙動を二次元流れとして解析している。伊藤ら⁵⁾は、水害前後での流路変化特性を調査して、横侵食による流路幅の

拡大と新流路の形成に特徴があることを報告している。新流路は、多くの場合、湾曲部を伴う蛇行部に形成されることを指摘している。上野^{6,7)}も、余笹川、黒川の湾曲部に着目し、被害程度を3段階にて分類して被害状況を報告し、河川湾曲部においては過度の土地利用を避け、河道幅を直線部と同等かそれよりも大きくする河川改修を行うことを提言している。

以上のように、1998年8月の洪水水害に関しては、多くの調査により災害実態が明らかにされるとともに、防災対策についても言及されている。三品ら⁸⁾は、改修された河道について、河道特性を踏まえた安全度評価の検討を実施している。一般に洪水災害に対する対策は、国、地方自治体にて実施され、いくらかでも災害を減らす減災対策が行われ防災に寄与している。例えば堤防の整備、護岸整備、集落を守るための河畔林の整備、小規模調整池の整備、洪水ハザードマップの作成、雨量データ、気象状況、河川予警報などをリアルタイムで提供する河川情報システムなど、諸方策が講じられている。一方、洪水時の河川流動を事前に予測し、対策を講じ防災に寄与することも大切な洪水災害対策と考えられる。その際には、実際の三次元河川形状を考慮すること、自由水面変動を考慮すること、洪水時の流れは、多くの場合非等方性の強い乱流場であることから、乱れの非等方性を再現できる乱流モデルを用いた氾濫河川の流れ解析を行うことなどの考慮が必要である。解析により得られる主流方向流速分布、断面内での二次流れ、乱流エネルギー、速度変動の運動量交換により生成されるレイノルズ応力、摩擦速度などの物理量から、最大流速とその生成位置、断面内の流れ状況、河床、側壁の侵食箇所の特定、ひいては氾濫を引き起こす流れのメカニズムなど防災対策に必要な情報を得ることが可能となり、防災に大きく寄与することになる。同時に河道設計、護岸対策などの提言にも活用することも可能であり、事前に氾濫流の挙動を予知しておくことは重要なことである。

以上の観点から、氾濫を起こした実河川を対象に三次元乱流場での水面変動も加味した数値予測

を行い、氾濫河川の流動挙動を考察するとともに、氾濫要因について知見を示すことを目的とする。計算対象とした河川は、1998年8月の豪雨により氾濫した那珂川水系の黒川を対象とした。解析に際しては、乱れの非等方性を再現するためレイノルズ応力輸送方程式を解くこととし、その対流、拡散項に対しては代数式化した代数応力モデルを用いた。さらに複断面河川形状に境界条件を正確に設定するため境界適合座標系を導入し解析を行った。

2. 記号

- D : 入口断面での河道幅
 h : 計画高水位
 H : 水深関数
 H' : 水深変動
 k : 乱流エネルギー
 P : 圧力
 Re : レイノルズ数 = hU_b/ν
 r : 左岸自由水面からの川幅方向距離
 S : 入口断面からの河道に沿う距離
 t : 時間
 $\overline{u_i u_j}$: レイノルズ応力
 U_i : 直交座標系での i 方向平均速度
 U_b : 河道入口断面での主流方向平均速度
 U_r : r 軸に沿う川幅方向平均速度
 U_s : S 軸に沿う主流方向平均速度
 $\overline{U}$: 平均摩擦速度
 u_r : r 軸に沿う川幅方向変動速度
 u_s : S 軸に沿う主流方向変動速度
 u_3 : 円筒座標上の深さ方向変動速度
 X_i : 直交座標上での i 方向座標軸
 δ_{ij} : クロネッカーのデルタ記号
 ε : 乱流エネルギー散逸率
 ν : 分子粘性係数
 ν_t : 渦動粘性係数
 ρ : 密度
 $(\overline{\quad})$: アンサンブル平均

3. 解析手法

(1) 解析対象河川

本解析においては、1998年8月の豪雨により氾濫した黒川を対象とした。黒川は、余笹川と合流し、余笹川は本流である那珂川に合流する。黒川は那珂川水系の二次支流に相当する。図1には、計算対象とした黒川の概略位置が示してある。計算に際しては、黒川全流域でなく、一部区間流域を取り上げ計算対象河川とした。具体的は、黒川と余笹川の合流地点から、約上流4.1km(北緯36°58', 東経140°08')に位置する河道を対象に1.097kmの区間を計算対象とした。

図2に、計算対象区間の河道形状、ならびに座標系を示す。座標系に関しては、図に示すように直交座標系と、流れ方向 S 軸と、 S 軸と直交する r 軸を用いた座標系が示されている。計算に際しては直交座標系を、計算により得られた特性量を示す場合には、直交座標系、 S - r 座標系を用いて示している。従って、湾曲河道部でのベクトル量を示すには、座標変換後の結果を示している。直交

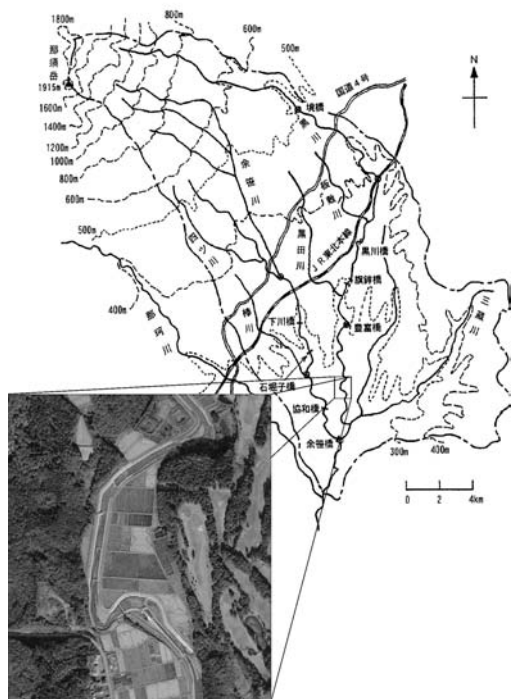


図1 Location of Kurokawa river

座標系では主流方向を X_1 、川幅方向を X_2 、河川の深さ方向を X_3 とし河道入口断面の左岸側自由水面位置を便宜的に原点とした。また、この入口断面から流れ方向に沿った距離は、入口断面川幅 D にて無次元化した無次元距離 S/D にて示している。

図より明らかなように河道は、上流部に緩やかな曲りを有する直線状河道、河道途中 $S/D = 15.00$ の位置から約 120° の角度で急峻に曲がる湾曲河道、湾曲河道に続く、比較的川幅の広い河道から川幅が絞られ直線河道へと変化する河道により構成されている。図には、 $S/D = 16.60$ での河道断面形状も示しているが、低水路と高水敷とからなる複断面開水路を形成している。図2に示す河道形状は、氾濫後改修された河道であるが、氾濫前と大きな河道変化はない。

氾濫は、 $S/D = 15.00$ の位置に相当する河道から湾曲河道に流入した流れが、河道に沿って流れることなくそのまま直進し湾曲部の外周部に流出し、水田を冠水させ大きな被害を発生させた。上野⁶⁾は、黒川と余笹川との合流地点から豊富橋までの区間で、河川領域幅の変化と災害形態を調査し、湾曲河道部被害について被害形態を3段階にて分類している。調査によると、この位置での災害形態は湾曲内側部に被害が無く、湾曲外周部での被害発生が大きい被害形態に分類される。氾濫時に計画高水位以上の水位であれば、湾曲河道の曲率中心が位置する内側にも冠水被害があるはずであるが、外周部で顕著であったことから、湾曲

部河道の手前で、流れはかなりの流速となっていたことが推察される。上流部は直線河道であり川幅にも急激な変化は認められないことから、湾曲河道区間にて流れが加速されるメカニズムは興味ある現象である。

(2) 支配方程式

三次元乱流場を解くには運動方程式を解くことが必要となるが、連続の式、運動方程式は以下のように示される。

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial X_i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{D\bar{U}_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial X_i} + \frac{\partial}{\partial X_j} \left[\nu \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial X_j} - \overline{u_i u_j} \right] \quad (2)$$

ここで $D/Dt = \partial/\partial t + \bar{U}_j \partial/\partial X_j$ である。運動方程式中の右辺第1項目の圧力勾配項は重力項に相当する。また、レイノルズ応力を求める際には、以下に示すレイノルズ応力輸送方程式を解くものとした。レイノルズ応力輸送方程式を解くことにより、乱れの非等方性をより正確に予測することが可能となる。例えば、非等方乱流に特徴的な第2種二次流れなどを正確に再現することができる。

$$\begin{aligned} \frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} = & - \left[\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial X_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial X_k} \right] \\ & - \frac{\partial}{\partial X_k} \left[\overline{u_i u_j u_k} - \nu \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial X_k} + \frac{\bar{p}}{\rho} (\delta_{jk} u_i + \delta_{ik} u_j) \right] \quad (3) \\ & + \frac{\bar{p}}{\rho} \left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right] - 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \frac{\partial u_j}{\partial X_k} \end{aligned}$$

しかし、上式を直接的に解くことは不可能でありいくつかのモデル化が必要となる。左辺第1項の対流項、ならびに右辺第2項に対しては Rodi⁹⁾ 近似を用いてモデル化を行った。この近似より対流、拡散項は微分型から代数式に変換される。さらに、レイノルズ応力輸送方程式をモデル化する際に問題となる圧力・歪相関項のモデル化に際しては、四次相関テンソルに付与される制約条件を一部改良しモデル構築を行った。モデル化された圧力・歪相関項を表1に、定数系を表2に示す。モデル導出、定数決定については別報^{10,11)}にて詳

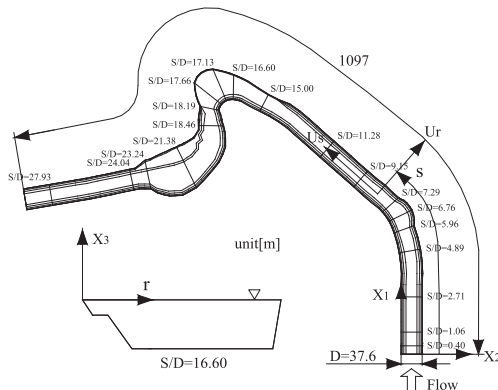


図2 Calculated region of Kurokawa river and coordinate system

表1 Modeling of the pressure-strain correlation term

$\pi_{ij,1} + \pi_{ji,1}$	$-C_1 \frac{\varepsilon}{k} (\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij})$
$\pi_{ij,2} + \pi_{ji,2}$	$-\frac{C_2 + 8}{11} (P_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij}) + \zeta k (\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}) - \frac{8C_2 - 2}{11} (D_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij})$
$[\pi_{ij} + \pi_{ji}]_w$	$C_1 = C_1^* + C_1' f(\frac{L}{X_w}) \quad C_2 = C_2^* + C_2' f(\frac{L}{X_w})$ $\zeta = \zeta^* + \zeta' f(\frac{L}{X_w})$
$P_{ij} = -\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k}$ $P_k = -\overline{u_k u_l} \frac{\partial U_k}{\partial x_l}$	$D_{ij} = -\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_i}$ $f(\frac{L}{X_w}) = \frac{C_\mu^{\frac{1}{3}} k^{\frac{2}{3}}}{\kappa \varepsilon X_w} 1$

表2 Model constants of the pressure-strain correlation term

C_1^*	C_2^*	ζ^*	C_1'	C_2'	ζ'	C_μ	κ
1.4	0.44	-0.16	-0.35	0.12	-0.1	0.09	0.42

述した。乱流エネルギー、乱流散逸輸送方程式については、高レイノルズ数型方程式を用いた。それぞれの輸送方程式は以下の様に示される。

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial X_j} \left\{ \left[v \delta_{jk} + c_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_j} \right] \frac{\partial k}{\partial X_k} \right\} - \overline{u_i u_k} \frac{\partial U_i}{\partial X_k} - \varepsilon \quad (4)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial X_j} \left\{ \left[v \delta_{jk} + c_\varepsilon \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_j} \right] \frac{\partial \varepsilon}{\partial X_k} \right\} - \frac{\varepsilon}{k} \left[c_{1\varepsilon} \overline{u_i u_k} \frac{\partial U_i}{\partial X_k} + c_{2\varepsilon} \varepsilon \right] \quad (5)$$

上式中の定数系は、 $c_s = 0.22$, $c_\varepsilon = 0.18$, $c_{1\varepsilon} = 1.44$, $c_{2\varepsilon} = 1.92$ である。

(3) 自由水面の変化解析

水面位置は、1価関数の水深関数を用いて解析を行った。乱流場においては、瞬時水面位置は、レイノルズ平均を行った以下の式にて示される。

$$\frac{\partial H}{\partial t} + U_1 \frac{\partial H}{\partial X_1} + U_2 \frac{\partial H}{\partial X_2} = U_3 - \overline{u_1 H'} - \overline{u_2 H'} \quad (6)$$

上式中、右辺第2項、3項は、速度変動成分と水深変動の相関値を示しているが、本解析では、考慮せずに解析を行った。求めた水深は、計算格子

に反映させ計算格子が変動しつつ計算を行った。座標変換には後述するように境界適合座標を用いているが、境界適合座標系では、計算格子は6面体を維持することが必要であり、従って、水面変化を再現するにも限界があり、水面が飛散するような現象は解析できない。

(4) 自由水面での境界条件

開水路乱流を特徴づける自由水面の影響を、境界条件にいかん反映させるかも開水路乱流を正確に予測する上で重要な要因となる。本解析では以下のように自由水面での境界条件を設定した。自由水面での乱流散逸は、一般に壁関数として使用される式を用いて計算を行うこととした。ただし、乱流散逸値は、壁関数を使用する場合と同様に、自由水面に位置する計算格子点から流路内部に向かって数えて一点目に相当する計算格子点で与えた。主流方向速度、水平方向速度および乱流エネルギーは自由水面で勾配零を、垂直方向速度は零の境界条件を課した。

また、自由水面近傍では、自由水面に対し垂直方向の乱れ強度が自由水面に到達する以前に減衰し、自由水面下にて非常に小さな値を取ることが実験的に指摘されている¹²⁾。この減衰現象を境界条件に加味する意味より、垂直方向乱れを自由水面から計算第一点まで零とし、この減衰現象を近似することとした。一般に、壁面近傍でも壁面に垂直方向の乱れ強度は、壁面に近づくにつれ減衰し、自由水面の場合と類似の傾向を示す。この意味から自由水面も一種の仮想壁面と考えられる。こうした自由水面の境界条件の導出背景¹³⁾、いくつかの開水路流れへ適用しての妥当性については別報¹⁴⁾にて報告した。

(5) 境界適合座標

自然河川は、河道、断面形状、河床とも複雑に変化するが、流れを支配する圧力場に影響を及ぼすためその形状は計算格子に正確に反映する必要がある。また、数値計算の上から複雑形状に沿って境界条件も正確に設定することが要求される。そこで、本解析においては境界適合座標系を導入

し解析した。境界適合座標系による手法は、物理平面上の解析領域を計算領域へと座標変換し計算平面上にて支配方程式を解く手法である。境界条件の設定が容易な反面、支配方程式は複雑となる。支配方程式の計算平面上への変換は次の数学定理より変換される。

$$\frac{\partial}{\partial X_i} = \frac{\partial \xi}{\partial X_i} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial X_i} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \zeta}{\partial X_i} \frac{\partial}{\partial \zeta} \quad (7)$$

上式中の ξ, η, ζ は変換された計算平面上での座標軸を示す。同時に物理平面上では計算格子形状に沿った座標軸を示している。上式を用いた各方程式の変換手法、変換により導出された輸送方程式、反変速度、計量テンソルなどは別報¹⁴⁾にて詳述した。

(6) 数値解析

河道全体の計算格子配列、ならびに $S/D = 16.60$ の位置での複断面格子配列を図3に示す。 ξ, η, ζ は計算格子に沿った座標軸を示している。計算格子は現象変化の急な領域に密に配置し、複断面内で $\xi \times \eta = 81 \times 41$ 、流れ方向に88設けた。特に湾曲部においては流れ方向に比較的細かな間隔で格子を設けた。本解析で対象とした複断面河道において断面内の圧力変化より水位が変化することになるが、初期水位を計画高水位である3.1mと設定し、計算開始後、1価関数の水深関数を用いて水位を求めた。レイノルズ数は、代表長さに計画高水位を、代表速度に断面内平均

速度を用いて 1×10^7 とした。また、河川に特徴的な河床変動、河道内の植生分布、Manningの粗度係数なども検討することが必要であるが、本解析では乱流解析に重きを置き、河床変動のモデル化、植生分布のモデル化については割愛した。

本解析における非等方性乱流モデルは、高レイノルズ型乱流モデルであり、従って、乱流エネルギー、乱流散逸輸送方程式の境界条件には壁関数を用いた。また、レイノルズ応力に関しては、輸送方程式を微分型から代数型としたことより境界条件設定の必要はない。河道入口断面での入口境界条件は、速度に関しては流れ方向に一樣速度を課し、乱流エネルギー、乱流散逸値は、それぞれ、 $k/U_b^2 = 1 \times 10^{-5}$ 、 $\varepsilon = k^{3/2}/D$ と小さな値を設定した。出口断面においては自由流出条件を課した。

支配方程式の離散化は有限差分近似により行い、計算諸量の格子点配置はRegular Grid法によった。各支配方程式の対流項差分近似はQUICK(三次精度の風上差分)を使用した。また、非定常項は陽解法とし、次の計算ステップにおける物理量が既知の時間ステップにて表されるよう差分した。陽解法の場合、計算時間刻みは大きく取ることができずCourant数が常に1以下となるよう時間刻みを設定した。代数応力モデルの場合、レイノルズ応力輸送方程式の対流、拡散項を代数式にモデル化する際、非定常項は省略される。圧力解法に関しては圧力補正量のポアソン方程式を反復法にて解き、元の圧力値に加え圧力場、速度場を構成する。これを連続の式が満足されるまで繰り返すことにより圧力場を得た。

4. 結果と考察

解析結果は、河道を大きく3区間に分けて検討する。第1の区間は、直線河道と緩やかな曲がり部を有する $S/D=0.00$ から $S/D=11.28$ までの区間。第2の区間は、急峻な湾曲部を有し、田畑や家屋が浸水の被害を受けた氾濫流域の $S/D=15.00$ から $S/D=18.46$ の区間。第3の区間は、湾曲部河道から直線河道へと変化する $S/D=21.38$ から $S/D=27.93$ までの区間である。河道断面における結果

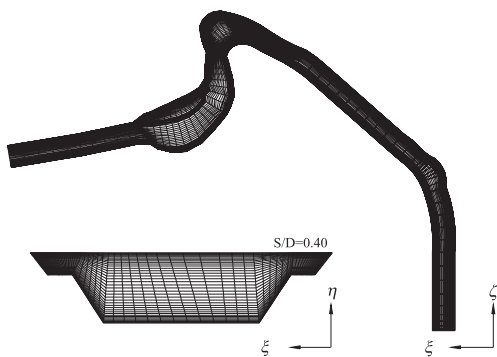


図3 Grids layout

は、上流部に視点を置いて下流断面を鳥瞰した解析結果であり、従って、図中の Right, Left は右岸、左岸を示している。また、解析結果表示に関し川幅は流れ方向に変化するが、表示スペースの関係から全ての断面が表示スペース内に収まるよう適便、尺度を変化させて表示した。また、以下に示す計算結果は、河床変動はなく、入口断面には一様流を課して、河床は滑面壁と仮定した結果である。

(1) 第1区間： $S/D = 0.00$ から $S/D = 11.28$

第1区間における主流方向速度分布の解析結果を図4に示す。計算値は、断面内平均速度にて無次元化し表示した。流入断面では、一様速度を課していることから、 $S/D = 1.06$ までは左右対称の等値線分布を示し断面内での顕著な変化は認められない。 $S/D = 2.71$ 断面では、河床、ならびに側壁での境界層の発達により比較的高い値の流速が断面中央部に認められ、左右対称の速度等値線分布も崩れてくる。この非対称速度分布は、下流部に存在する緩やかな曲がり河道の影響によるものである。 $S/D = 4.89$ 断面では、最大主流方向速度は左岸に寄り対称性は崩れ非対称速度等値線分布が顕著に現れる。

遠心力による主流方向速度の右岸壁移行は、緩やかな曲がり河道に相当する $S/D = 5.96$ から 7.29 断面で顕著である。この緩やかな曲がり河道での特徴的な現象として、川幅が上流部の直線河道より多少広いにもかかわらず $S/D = 6.76$ 断面では、 1.39 と比較的速度が生成されていることを指摘できる。これは、速度等値線から理解できるように右岸壁近傍、右岸高水敷にはく離領域が形成されるためである。すなわち死水領域の発生により流路断面積が減少したことに起因している。一般的に高水敷が設けられていると水面幅が広がることから流速を遅くする効果を有するものと考えられるが、高水敷の設置場所によっては逆効果となることを計算結果は示唆している。一方、緩やかな曲がり河道にて、はく離流れが形成されるのは、図2に示す河道形状から理解できるように、曲がり河道にて右岸は円弧状に突き出した形状を

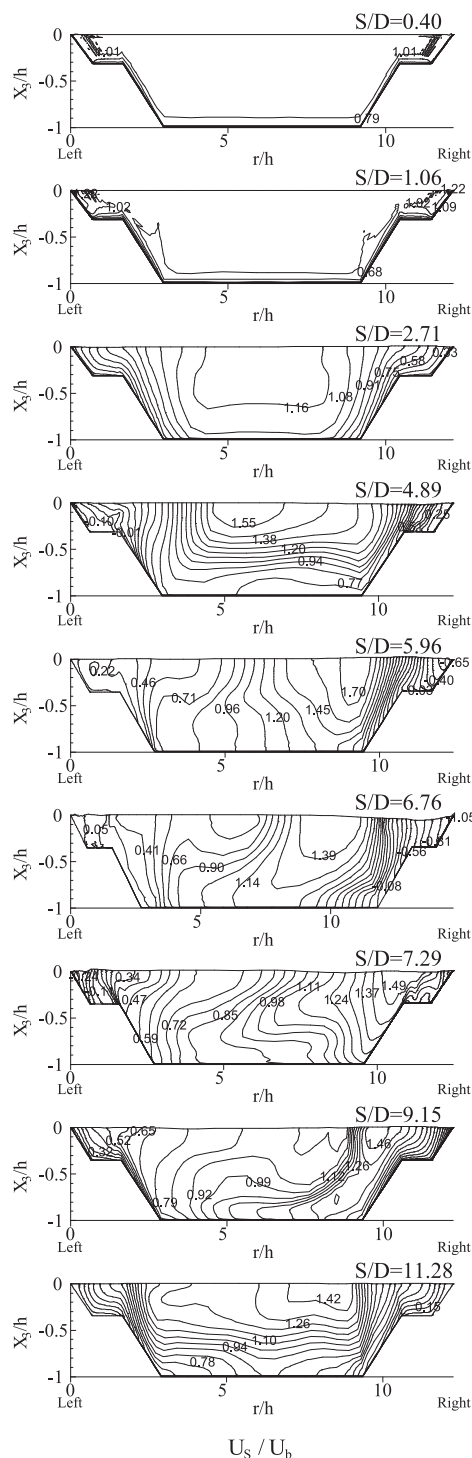


図4 Contour map of streamwise velocity in the first flow region

示しており、 $S/D=7.29$ 断面の右岸壁近傍では流れが堰き止められることになり高い圧力が生成され、上流部の $S/D=6.76$ 断面にてはく離流れが形成されるためと解釈できる。この円弧状に突き出した河道形状を突き出しのない滑らかな河道とすることより、死水領域の生成は抑制されるものと思われる。

緩やかな曲がり河道に続く直線河道の $S/D=9.15$ 、 11.28 断面では、死水領域は形成されること無く、また曲がり河道にて認められるような大きく歪んだ等値線分布から、歪みの少ない等値線分布に変化して行き、流れが徐々に直線河道の流れに回復していることが理解できる。

また、第1区間での水面変動は、緩やかな曲がり河道の $S/D=5.96$ から 7.29 断面の右岸壁近傍に認められるがその水位変化は僅かである。 $S/D=5.96$ 断面の右岸壁近傍で水位は僅かに上昇し、その後下降し $S/D=7.29$ 断面では再度上昇し、曲がり河道以降では水平水面へと変化して行く。 $S/D=5.96$ 断面での水位上昇は、右岸壁側での高い圧力に起因し、その後の $S/D=6.76$ 断面での水位低下は川幅変化によるものと推測される。

次に第1区間の二次流れの発達について検討する。図5に、第1区間における二次流れ分布を示す。二次流れは、河道内で大きく変動するためベクトルの大きさは統一せず、各断面にて異なる。従って、断面間での速度比較の際には注意が必要である。河道入口から $S/D=2.71$ 断面までの二次流れに着目すると最大でも8%程度の微小な二次流れが形成されている。河道は直線で断面内での圧力分布は一樣であることから、この二次流れは、乱れの非等方性に起因する第2種二次流れと解釈される。第2種二次流れは、直線開水路に認められる特徴的な流れであり多くの実験¹⁵⁾、解析結果¹⁶⁾に報告されている。本解析結果も、乱れの非等方性に起因する第2種二次流れを再現している。

流れが曲がり河道に近づくにつれ、二次流れ強度は増加し時計回りの循環流を断面内で形成する。この傾向は、曲がり河道に相当する $S/D=5.96$ から 7.29 断面にて顕著である。断面内で流体粒子に

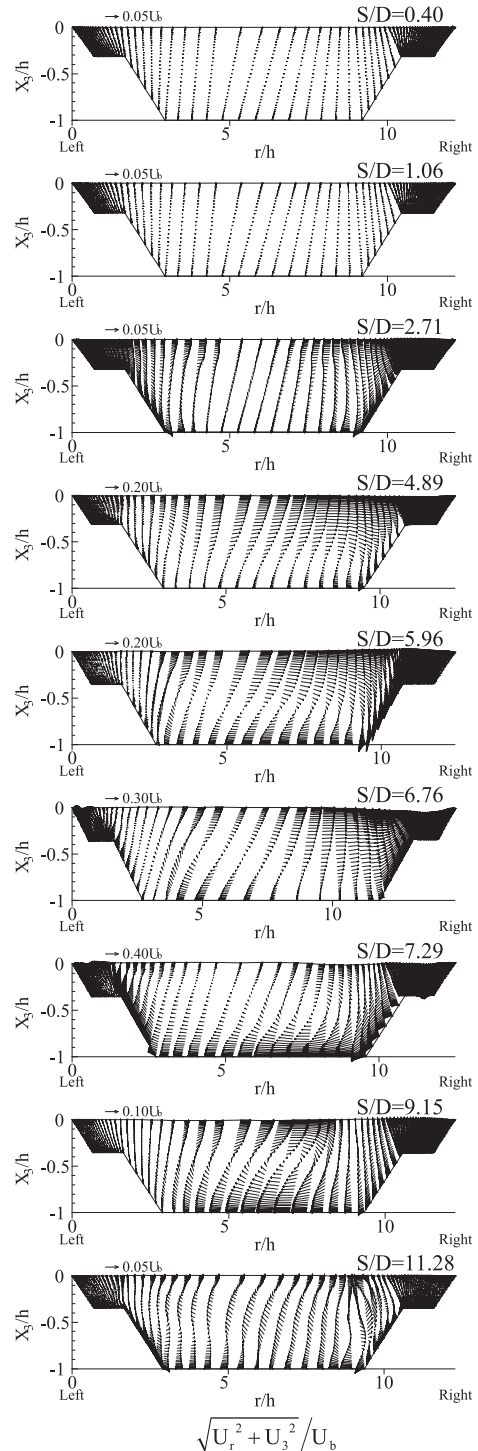


図5 Secondary flow vectors in the first flow region

作用する力として、遠心力、圧力勾配力、乱れ速度変動を介しての運動量交換による拡散力を指摘できるが、支配的な力は、遠心力と圧力勾配力と考えられる。従って、二次流れは、遠心力と圧力勾配力のバランスとして生成されることになる。すなわち、自由水面近傍では、速い主流方向速度が存在することから圧力勾配力と比較して遠心力が優位にあり、流体粒子は左岸から右岸に向かい移動する。逆に河床近傍においては、速度が遅いことから右岸から左岸に作用する圧力勾配力が勝り、河床近傍では右岸から左岸に向かう二次流れが生成され、結果的に時計方向の循環流を形成することになる。先に示した主流方向速度等値線の最大速度が右岸側に生成されるのは、二次流れの移流効果によるものと説明できる。また、 $S/D=6.76$ 断面に着目すると、低水路右岸の傾斜壁に沿うように二次流れが形成されており、他の曲がり河道断面での二次流れ分布と異なるが、これは図4に示したようにはく離流れが存在するためと解釈される。この現象は低水路右岸の傾斜壁でも認められ、さらに比較的強度の強い二次流れが生成されることを計算は予測している。このことは、 $S/D=6.76$ 断面においては、低水路河床の土砂、そして傾斜壁面侵食による土砂が傾斜壁に沿う二次流れにより高水敷に移流される可能性が高いことを示唆している。曲がり河道にて最大二次流れ強度を示すのは $S/D=7.29$ 断面であり、低水路河床近傍では、断面内平均速度と同程度の二次流れが形成されている。

曲がり河道に続く直線河道の $S/D=9.15, 11.28$ 断面においては、二次流れはその強度を減衰していくことが理解できる。特に、 $S/D=11.28$ 断面での二次流れは非常に小さな値にまで減衰している。 $S/D=11.28$ 断面は、曲がり河道出口断面から水深の約4倍の距離に位置している。このことは、曲がり河道での遠心力、圧力勾配力により生成された二次流れは、比較的短い距離で減衰することを示唆している。

本解析では代数レイノルズ応力モデルを用いており6成分のレイノルズ応力の発達挙動を解析している。それらのレイノルズ応力の内、応力 $\overline{u_r u_s}$

は、主流方向変動速度と半径方向変動速度との相関値であり、両者間での運動量交換の結果生成される応力である。従って、レイノルズ応力 $\overline{u_r u_s}$ の絶対値が大きいことは、主流と半径方向間の運動量交換が大きいことを意味し、応力分布の値から侵食位置、特に側壁における侵食を予測することが可能となり、護岸工事实施の上で指針を示すことになる。この観点から図6に、レイノルズ応力 $\overline{u_r u_s}$ の応力分布の解析結果を示す。応力は断面内平均速度にて無次元化し表示した。

上流部の直線河道にあたる $S/D=2.71$ 断面に着目すると、低水路の左右傾斜壁面近傍で比較的絶対値の高い値が認められ、この領域で運動量交換が活発なことを示している。しかし、その値は下流域での低水路河床における値と比較すると小さく、せん断応力 $\overline{u_r u_s}$ は、下流に流れるにつれ徐々に、その絶対値が増加傾向を示す。第1区間にて、せん断応力 $\overline{u_r u_s}$ の絶対値が最大を示すのは、 $S/D=6.76$ 断面である。この断面で最大値は、低水路右岸側の河床近傍に生成される。この位置における主流方向速度分布から明らかなように、この位置には、はく離流れが生成され速度分布が大きく変化し強いせん断流れが存在することが分かる。この速度せん断流れの存在が、レイノルズ応力 $\overline{u_r u_s}$ の生成に起因していると解釈される。 $S/D=6.76$ 断面にて認められた最大値も、下流の $S/D=7.29$ 断面に至ると値は大きく減少し、右岸側低水路河床近傍に断面内最大値が形成される。この断面の二次流れ分布から、比較的強度の強い二次流れにより時計回りの循環流が形成されていることが分かる。この循環流は高速流体を河床壁まで移流する結果、はく離流れは消滅することになる。その結果 $\overline{u_r u_s}$ の値は、大きく減少する。

緩やかな曲がり河道の下流に続く直線河道において、せん断応力値は、流れ方向に減少傾向を示す。特徴的な現象として断面内の絶対値の最大は、曲がり河道直後では、低水路河床、左右傾斜壁から離れた領域に形成されるが、さらに下流の断面では、最大値は低水路傾斜壁近傍に生成されるようになる点を指摘できる。これは、曲がり河道での遠心力により主流方向速度分布は大きく変

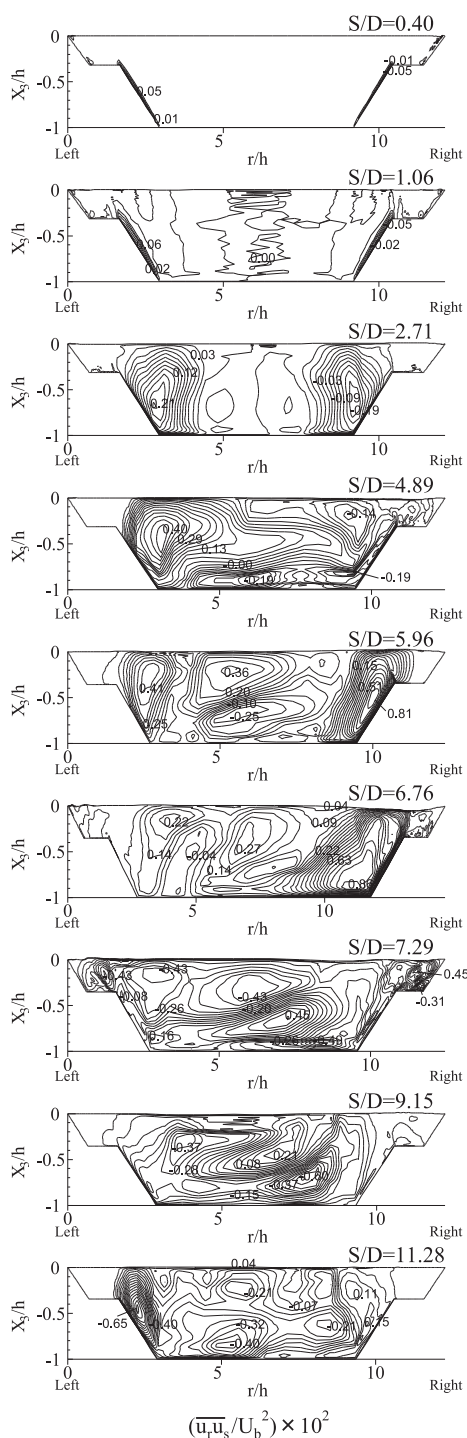


図6 Distribution of shear stress in the first flow region

化した後、回復するためと解釈される。このことは、低水路傾斜壁の侵食作用は、曲がり河道直後ではなく、主流方向速度が直線河道の速度分布へと回復する位置から侵食が開始することを示唆している。

(2) 第2区間：S/D = 15.00からS/D = 18.46

第2区間は、急峻な湾曲部を有し、氾濫区間となった河道である。図7に、第2区間における主流方向速度分布の解析結果を示す。図に示す断面

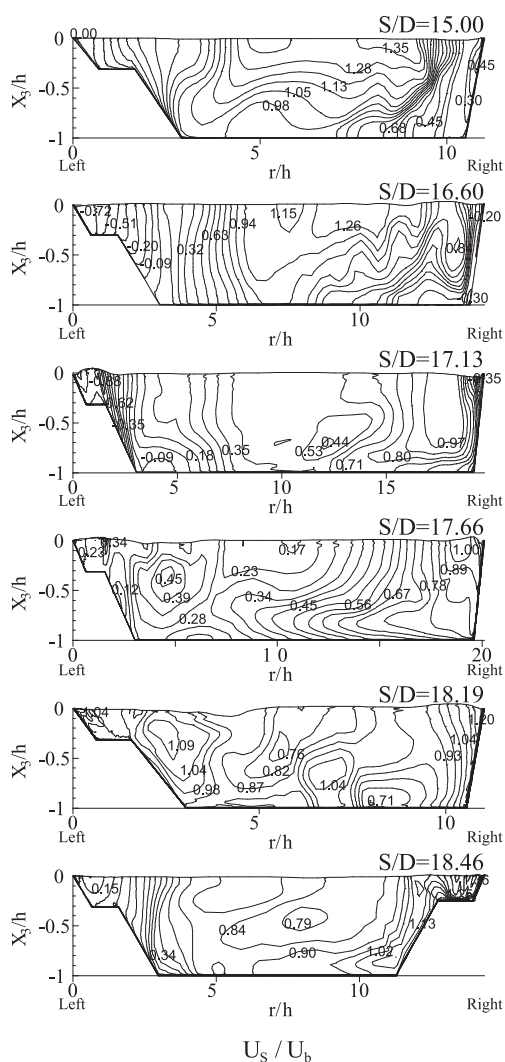


図7 Contour map of streamwise velocity in the second flow region

形状から分かるように第2区間では、右岸には高水敷が設置されていない。解析結果から、この全区間での最大主流方向速度は、 $S/D = 15.00$ 断面の右岸側自由水面にて生成され、断面内平均速度の1.35倍の流速が生成される。こうした速い流速は、流路幅が増大する $S/D = 16.6$ 断面でも維持されている。これは、速度分布からも理解できるように左岸側の高水敷、低水路傾斜壁近傍にて、はく離流れが存在するため、流路断面積が実質減少していることに起因している。 $S/D = 16.6$ 断面以降では、河道幅が増大するため高速の流れの生成は顕著には認められないが、流路幅が急激に減少する $S/D = 18.19$ 断面では、その右岸壁に再度比較的高速の流れ、断面内平均速度の1.20倍の速度生成が認められる。以上の流動現象は、はく離領域形成による流路断面積の変化に依存し、はく離流れの発生位置を予測しておくことは、重要なことであることを示唆している。また、計算結果から、第2区間においては流路右岸壁に沿って常に高速の流れが形成されていることを知ることができる。

また、第2区間での水面変動は、河道流路形状が大きく変化することから第1区間よりも水面変動は顕著である。 $S/D = 16.60$ 断面の右岸壁では水面の上昇が確認でき、 $S/D = 17.13$ 断面では、逆に左岸壁にて水面の上昇が認められる。左岸壁での水面上昇ははく離流れと相関があるものと推察される。特に顕著な水面変動は、 $S/D = 18.19$ 断面にて認められる。左岸壁側の自由水面では窪んだ水面を呈し、一方右岸壁側では多少盛り上がった水面を形成する。この断面は流路幅が急激に減少する位置であり、このため流動も大きく変化する。主流方向速度分布からも理解されるように、低水路河床壁近傍に1.04と断面平均速度相当の流れが形成され流動変化が大きいことが理解できる。

第2区間での流動状態の理解を深める意味から、自由水面上の速度分布を図8に示す。図から明らかなように、曲がり河道に入る手前の右岸近傍にて、断面平均速度を上回る流れが形成されていることが分かる。この速い流れは、右岸壁に

沿って川幅が拡大されても減衰することなく、その流速を保持し右岸壁に沿って流れている。急激な曲がりによる遠心力が高速流体を右岸側に移流するためと解釈される。

本河道にて、流下能力以上の流量が流れた場合、図8に示した最大流速を有するベクトル方向に流れは流出すると推測される。すなわち曲がり河道の右岸を越えた比較的速度い流れは、その慣性力により流出し、曲がり河道外側で広範な被害を発生させる。対照的に、曲がり河道の左岸側には、高速流れは形成されず流れが左岸を越えたとしても、その被害の範囲は右岸と比較して狭い領域に限られることが予測される。上野⁶⁾は、1998年8月の豪雨による氾濫箇所を調査し、湾曲河道部被害について被害形態を3段階にて分類している。すなわち、湾曲内岸側の農地に新流路が形成され大きな被害が発生した場合、新流路の形成は

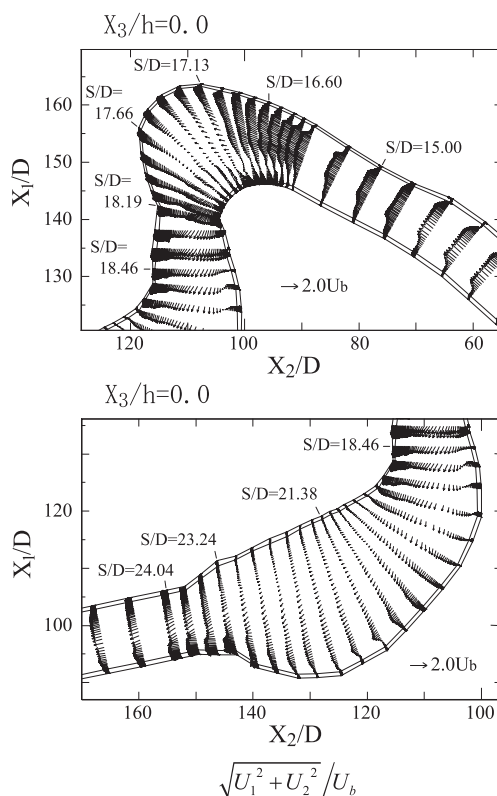


図8 Streamwise velocity vectors on free surface in the second flow region

無いが湾曲内岸側の農地が洗掘されて中程度の被害が発生した場合、湾曲内岸側の農地被害が小さかった場合の3段階評価である。調査によると、この区間での被害形態は湾曲内岸側に被害が小さい場合に分類されている。このことは、曲がり河道左岸に沿う速度が、非常に小さいことを意味しており、図8に示すように、解析においても内岸に沿う自由水面上速度ベクトルは、第2区間のほぼ全区間にわたり小さい。

一般に、本解析河道のように急峻に曲がる河道の防災対策として捷水路を設けるなども一つの対策と考えられる。同時に、氾濫の一次要因である曲がり河道で的高速流れを減衰させること、すなわち、はく離領域の形成を抑えることが抜本的対策となることを考慮すると、右岸側に高水敷を設けることも対策とし有効であると思われる。高水敷を設けることより、曲がり河道右岸に沿う高い圧力分布を減衰、変化させることが可能と思われるからである。

図9に、第2区間における二次流れ分布の解析結果を示した。解析結果から、曲がり河道に流入するにつれて二次流れ強度は増大し $S/D=17.13$, 17.66 断面にて比較的大きな強度を示し、その後減衰する。断面内の二次流れは、自由水面近傍では左岸から右岸への、低水路河床近傍では、右岸から左岸への流れとなり、断面内全体で時計方向回りの循環流を形成する。また、はく離領域が形成される、 $S/D=17.13$ 断面の低水路左岸側河床近傍の二次流れ強度、主流方向速度の大きさに着目すると、河床近傍の二次流れは、はく離して低速となっている主流方向速度に比較して大きな値を有しており、主流方向より右岸から左岸方向への移流効果が優ることが分かる。

図10に、先に示したレイノルズ応力 $\overline{u_r u_s}$ の第2区間での解析結果を示す。特徴的な現象として、比較的大きな絶対値は、 $S/D=15.00$ から 17.13 断面の右岸壁近傍に形成されること。さらに水面が大きく変化する領域では比較的大きな値を示すことを指摘できる。例えば、 $S/D=18.19$ 断面の大きく窪んだ水面近傍では高い値が形成されている。こうした結果から低水路右岸壁の侵食は、

$S/D=15.00$ から 17.13 断面にて顕著であり、それ以降の断面では、水面変動近傍にて絶対値の高い値を示し河床、ならびに側壁での侵食は顕著でないことを示している。

(2) 第3区間： $S/D=21.38$ から $S/D=27.93$

第3区間は、急峻な河道から川幅が急激に拡大し、かつ、緩やかな曲がりをも有する河道と、それに続く川幅が急激に縮小する直線河道により構成

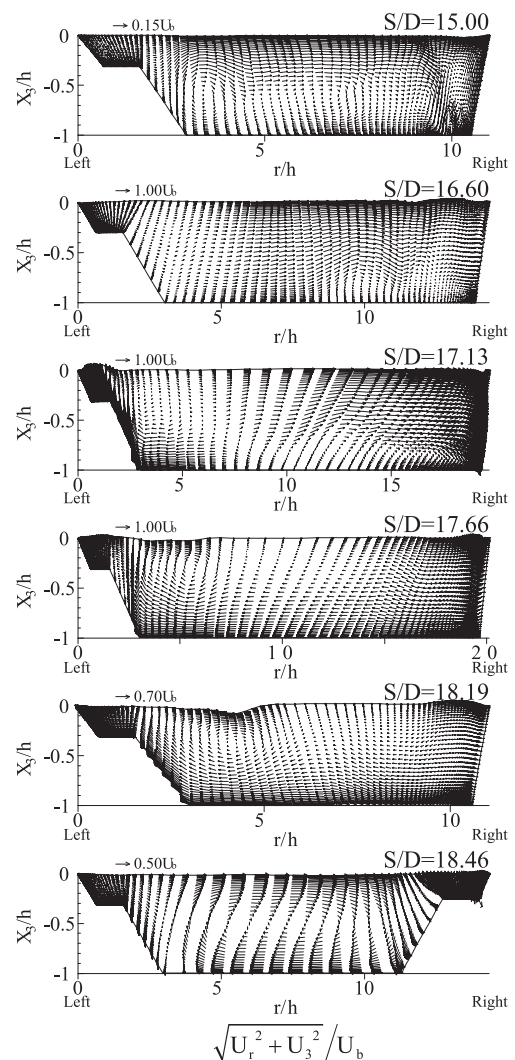


図9 Secondary flow vectors in the second flow region

されている。断面形状も高水敷の占める領域が変化して、流れに沿って大きく変化する。

図11に、第3区間における主流方向速度分布の解析結果を示す。河道形状変化は大きい、はく離領域の生成は少なく、 $S/D=21.38$ 断面の左岸高水敷に認められる。この左岸高水敷でののはく離流れは、河道幅が急激に減少することより左岸高水敷で発生する高い圧力に起因している。しかし、この断面では右岸の広い高水敷により主流方向速度が断面内平均速度以上の値を持つことはな

い。第3区間での最大主流方向速度に着目すると、その値は、直線河道の $S/D=27.93$ 断面にて認められる。これは、川幅減少による流路断面積減少に起因し、第1区間とほぼ同程度の最大主流方向速度を示している。また、この区間での特徴的現象として、川幅が急激に縮小していく途中に位置する $S/D=23.24$, 24.04 断面にて最大主流方向速度が、左岸の高水敷水路に形成されることを指摘できる。最大主流方向速度の発生位置は、流れと共に変化するを計算結果は示しており、河道設計に際し流路断面積変化のある区間だけでなく、それに続く直線河道に対しても注意が必要であることを示唆している。

以上のように第3区間での主流方向速度に関して、左岸高水敷での速度変化が大きいことを計算は予測しているが、水面変動に着目すると主流方向速度と同様左岸高水敷での変化が大きい。特に $S/D=23.24$ 断面にて顕著である。また、 $S/D=$

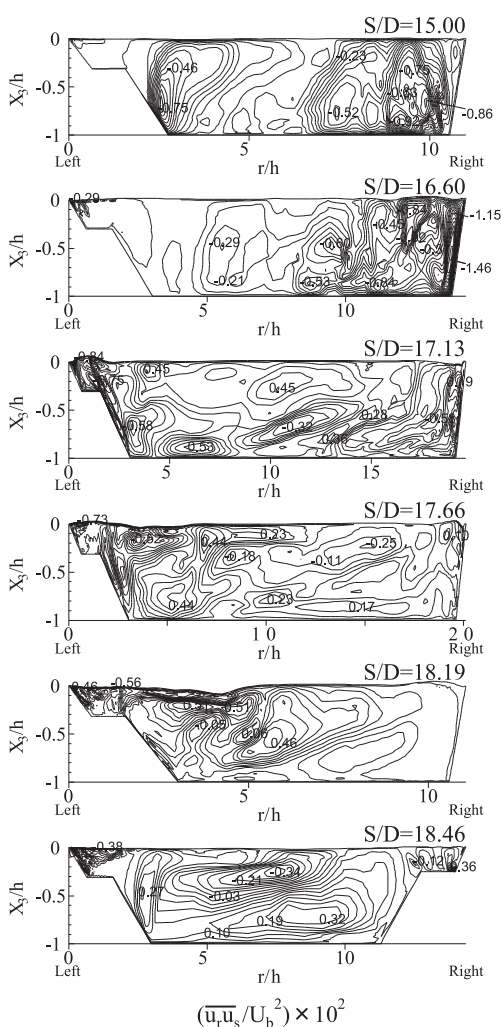


図10 Distribution of shear stress in the second flow region

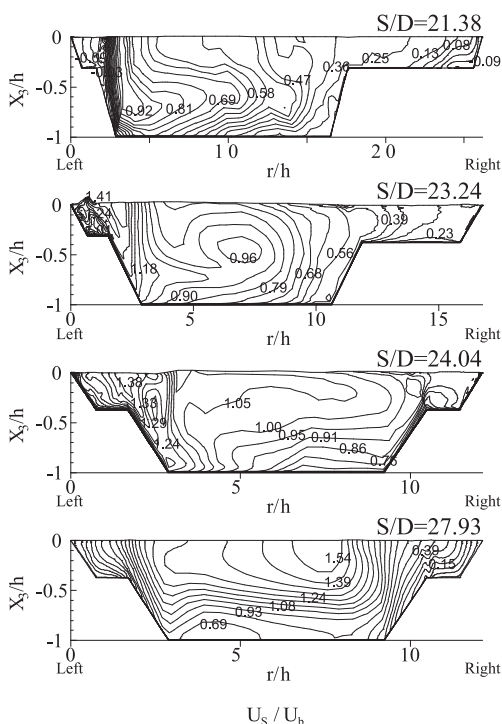


図11 Contour map of streamwise velocity in the third flow region

24.04断面では $r/D=3.3$ 付近にて自由水面の上昇が認められる。

図12に、第3区間における二次流れ分布の解析結果を示した。この区間での流れは、曲率中心位置が左岸に存在する急峻な河道とは異なり、曲率中心位置は右岸へと移動し、遠心力の作用する方向は逆となる。従って、 $S/D=21.38$ 断面の二次流れベクトル図から明らかなように、自由水面近傍では右岸から左岸へ向かう二次流れが、河床で近傍では左岸から右岸への二次流れにより、反時計方向の循環流が断面内に形成される。さらに下流の $S/D=23.24$ 断面においても、反時計回りの循環流は保持されているが、二次流れ強度は加速されている。この断面における最大主流方向速度は、左岸高水敷に生成されるが、これは自由水面に沿う二次流れにより比較的高速の流体が左岸高水敷に移流されるためと解釈される。この傾向は $S/D=24.04$ 断面でも同様であるが、二次流れ強

度は減衰し、従って最大主流方向速度も減少している。

さらに下流の直線開水路に相当する、 $S/D=27.93$ 断面に至ると遠心力、圧力勾配力が作用しなくなり二次流れ強度は大きく減衰し断面平均速度の5%以下の微小な強度となることが分かる。この断面においては、圧力勾配力により生成される第1種二次流れから非等方性乱流により生成される第2種二次流れへ遷移して行く過程と解釈される。二次流れにより形成される循環流も反時計方向となり上流部の循環流とは異なる。

図13に、第3区間におけるレイノルズ応力 $\overline{u_r u_s}$ の応力分布の解析結果を示す。この区間に絶対値の最大が形成されるのは、 $S/D=27.93$ 断面における低水路左岸の傾斜壁近傍の位置である。この傾斜壁近傍では、比較的高速の流速が存在することが、図11に示す主流方向速度分布から明らかであり、主流方向速度の半径方向の速度勾配は大き

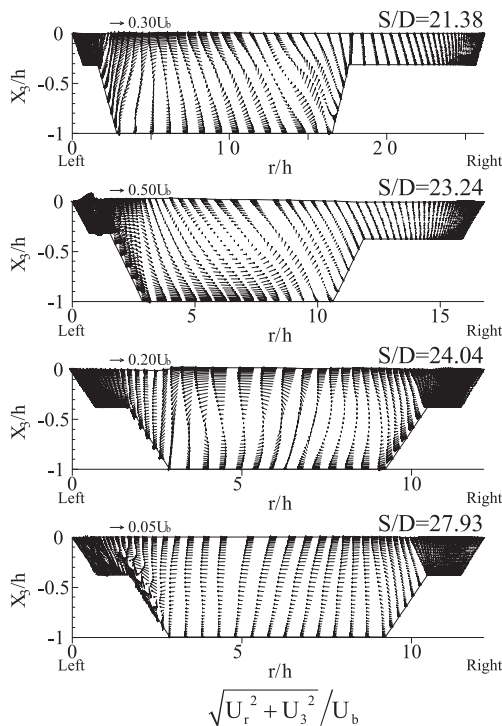


図12 Secondary flow vectors in the third flow region

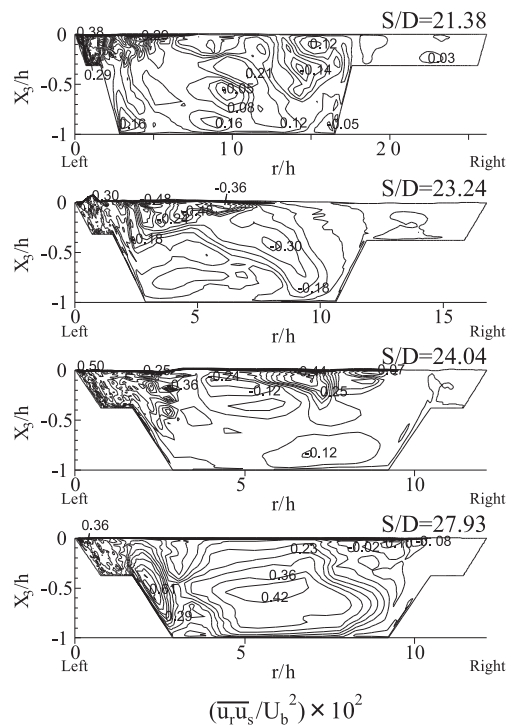


図13 Distribution of shear stress in the third flow region

く、レイノルズ応力 $\overline{u'u_s}$ の値に反映されたものと解釈される。他の断面では水面近傍に比較的高い値の絶対値が存在しており、河道側壁の浸食作用は、第3区間下流にて始まることを計算結果は示している。こうして解析結果は、護岸工事の際に、特定領域の側壁に強固な護岸工事を施すことを可能として、氾濫を想定した河道設計の際に有益な手段となると思われる。

(3) 摩擦速度分布

自然河川では、常に河道の侵食、移流、堆積作用が発生し河道を管理する意味から、河道の三次元流動挙動を事前に把握することは重要なことである。本解析で対象とした氾濫河川を想定した複断面開水路流れにおいても同様であり、また自然災害を防止する意味からも重要である。ここでは、河道の侵食作用を知る上から計算結果を用いて摩擦速度分布を得ることを試みた。摩擦速度は壁面上のせん断応力を代表する物理量であり、摩擦速度が大きな値を示す位置では、せん断応力による浸食作用が大きいことを意味するものと考えられる。従って、河床での摩擦速度分布を得ることができれば、その分布から侵食作用の程度を知ることが可能となる。摩擦速度は対数速度分布から算出した。

図14に、図の上からそれぞれ第1区間、第2区間、第3区間において比較的高い値を示した領域に限り摩擦速度分布を示す。図に示した摩擦速度分布は、河道を上部から鳥瞰した分布である。ただし、第1区間において河道の両岸に沿って縁取られている領域は、高水敷両岸の傾斜壁を示しており、この領域を除いた高水敷河床、低水路両岸の傾斜壁、低水路河床における摩擦速度分布を示している。第2区間においては、右岸の傾斜壁、高水敷左岸の傾斜壁を除いた領域での摩擦速度分布が示されている。第3区間では、高水敷両岸の傾斜壁を除いた領域での摩擦速度分布が示されている。

図14から、第1区間において摩擦速度の最大値は、 $S/D=7.29$ 断面近傍の右岸高水敷とそれに続く低水路傾斜壁に生成されることが分かる。上流

部では離流れの存在により $S/D=7.29$ 断面での主流方向速度、二次流れは大きく変化し、その主流方向速度分布から比較的高速の流体が高水敷、低水路右岸の傾斜壁へと移流されていることが分かる。この高速流体が大きな摩擦速度値を生成させる要因となっているものと解釈される。

第2区間における最大摩擦速度は、急峻な曲がりの後の $S/D=18.19$ 断面から18.46断面間の右岸高

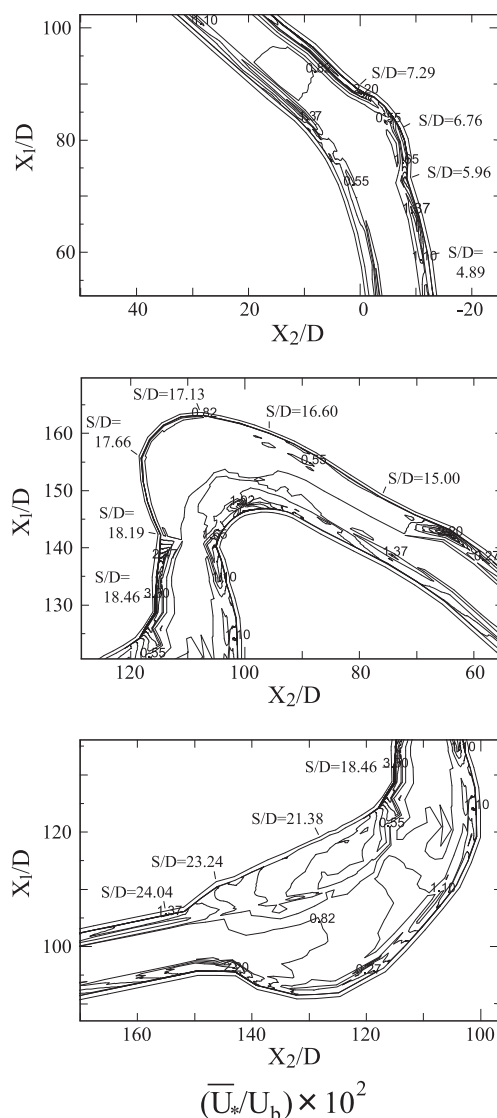


図14 Distribution of friction velocity over river bed

水敷河床にて生成されている。この区間の河道特徴は、 $S/D=18.19$ 断面では右岸に高水敷は設けられていないが、以後の $S/D=18.46$ 断面では右岸に高水敷が設けられ、急激な断面形状変化がある点を指摘できる。従って、図7に示す $S/D=18.46$ 断面での主流方向速度等値線から分かるように右岸高水敷河床にて比較的高速の主流方向速度が河床近傍に形成されている。このことは、高水敷が大きな侵食作用を受けることを意味しており、上流部にも高水敷を設けて急激な断面形状変化を抑える河道設計が必要であることを示唆している。また、急峻な曲がり河道左岸にも比較的高い値の摩擦速度が形成されており、この領域での護岸も大切であることを予測結果は示している。

第3区間では、流路断面積が急激に減少して加速流が形成される区間であるが、最大摩擦速度値は、 $S/D=23.24$ 断面から 24.04 断面間の左岸高水敷にて認められる。 $S/D=23.24$ 断面内の最大主流方向速度は左岸高水敷にて生成されており、高い摩擦速度は、この最大主流方向速度に起因していると思われる。また、本解析で対象とした複断面河道において、比較的大きな値を示す摩擦速度は、低水路河床より、むしろ両岸の高水敷河床にて生成される。その際の高水敷河床近傍には比較的高速の主流方向速度が流入しており、この高速の主流方向速度により侵食作用が促進されるものと解釈される。従って、河川氾濫時の侵食作用を抑えるには、事前に局所的な護岸補強工事を実施するばかりでなく、河道設計時に局所的に高速領域が生成されないような配慮が必要である。

以上のように、三次元乱流数値予測により、事前に氾濫時の流動挙動を知り、対策案を提言することは可能であり、それにより氾濫河川被害をいくらかでも抑制することも可能である。今後、三次元河川流動を簡便に予測できるシステムを構築していくことが大切であることを計算結果は示唆している。

5. 結論

那珂川水系に属する黒川を対象に、実際の氾濫区間を対象に、代数レイノルズ応力モデルを用い

て解析し以下の結論を得た。

- (1) 本解析対象とした急峻な曲がり河道での氾濫の要因は、曲がり河道流入部の河床近傍にて発生するはく離流に起因する。すなわち、はく離流れによる死水領域が流路断面を減少させ、自由水面近傍にて主流方向速度を加速させることに起因する。
- (2) 急峻な曲がり河道入口でののはく離流れの発生は、曲がり河道右岸の傾斜壁に発生する高い圧力に起因する。従って、河道右岸に高水敷などを設けて傾斜壁に生成される高い圧力を緩和することが防災の観点から必要である。
- (3) 断面内の二次流れは、流体を移流させる結果、主流方向速度分布に大きく影響を及ぼす。例えば、第3区間の $S/D=24.04$ 断面では、低水路左岸の自由水面近傍にて最大主流方向速度が形成されるのは、二次流れによる移流効果による。
- (4) 自由水面変動は、曲がり水路部にて顕著であり、特に $S/D=18.19$ 断面で顕著な水面変動が予測された。
- (5) 代数レイノルズ応力モデルにより計算した6成分のレイノルズ応力のうち、せん断応力分布を示し、河道側壁近傍にて運動量交換が活発に行われる位置を明らかにした。
- (6) 解析結果より摩擦速度を算出し、その分布から侵食作用は低水路河床よりも、一部の高水敷河床にて顕著であることを示した。
- (7) 本解析手法を用いることにより、河川氾濫時の三次元流動を予測し護岸工事、河道設計に結果を反映することより防災の一助となることを示した。

謝 辞

本研究を実施するに当たり栃木県土木部河川課には、河道形状データを貸与していただいた。ここに記して謝意を表する。

参考文献

- 1) 牛山素行、寶 馨：1901年以降の豪雨記録から見た2000年東海豪雨の特徴，自然災害科学，

- 21-2, pp.145-159, 2002.
- 2) 山本晴彦, 岩谷 潔, 鈴木賢士, 早川誠而, 鈴木義則: 福島県南部から栃木県北部にかけての降水分布から1998年8月末豪雨の特徴, 自然災害科学, 20-2, pp.161-172, 2001.
- 3) 中川 一, 高橋 保, 里深好文: 1998年洪水による那珂川水系余笹川の河道変動について, 水工学論文集, 44, pp.395-400, 2002.
- 4) 舘健一郎, 末次忠司, 小林裕明, 都丸真人: 洪水氾濫時の防災樹林帯の効果に関する検討, 水工学論文集, 45, pp.913-918, 2001.
- 5) 伊藤和典, 須賀亮三, 茂木信祥, 池田裕一: 平成10年8月末の那須出水による余笹川の流路変化の特性, 水工学論文集, 44, pp.407-412, 2000.
- 6) 上野鉄男: 余笹川流域の1998年水害の発生構造について, 自然災害科学, 24-3, pp.303-321, 2005.
- 7) 上野鉄男: 余笹川流域の1998年水害の研究, 京都大学防災研究所年報, 第47号 B, pp.545-564, 2004.
- 8) 三品智和, 須賀如川, 助川純一郎, 古川保明, 菅俣 崇, 福田一郎, 築瀬和裕: 余笹川の災害対策後河道の河道特性に関する考察, 水工学論文集, 46, pp.343-348, 2002.
- 9) Rodi, W.: A new algebraic relation for calculating the Reynolds stresses, *Z. Angew. Math Mech.*, Vol.56, pp. T219-T221, 1976.
- 10) 杉山 均, 秋山光庸, 山中和典, 平田 賢: 縦筋を伴う三次元河川流路の乱流構造解析, 土木学会論文集, No.479/II-25, pp.81-90, 1993.
- 11) 杉山 均, 秋山光庸, 佐藤亮輔: 矩形断面蛇行開水路流れの三次元乱流構造に関する研究, 土木学会論文集, No.628/II-48, pp.149-161, 1999.
- 12) Nakagawa, H., Nezu, I. and Ueda, H.: Turbulence of open channel flow over smooth and rough beds, *Proc. of Japan Soci. Civil Engrs.*, Vol.241, pp.155-168, 1975.
- 13) 杉山 均, 秋山光庸, 松原 珠: 複断面開水路内の乱流構造解析と縦渦生成に関する研究, 土木学会論文集, No.515/II-31, pp.55-65, 1995.
- 14) 杉山 均, 秋山光庸, 亀澤正之: 曲がり開水路乱流の構造解析と二次流れ遷移に関する研究, 土木学会論文集, No.572/II-40, pp.11-21, 1997.
- 15) 富永晃宏, 江崎一博, 欄津家久: 台形断面開水路の三次元乱流構造に関する実験的研究, 土木学会論文集, No.381/II-7, pp.55-63, 1987.
- 16) 杉山 均, 秋山光庸, 亀澤正之: 台形断面を有

する三次元開水路流れの乱流構造解析, 土木学会論文集, No.527/II-33, pp.27-36, 1995.

(投稿受理: 平成21年5月 13日

訂正稿受理: 平成21年10月 8日)